за кандидат-студента

ТРИГОНОМЕТРИЧНИ УРАВНЕНИЯ

КРАСИМИРА ВЛЪЧКОВА — София

Тригонометричните уравнения с различна степен на сложност участват в много варианти на кандидатстудентските изпити по математика. Не е известен общ метод, който да решава произволно такова уравнение. В повечето случаи обаче е възможно чрез подходящи преобразувания разглежданото уравнение да се сведе до едно или няколко по-прости уравнения, чиито решения са добре известни. Обикновено това са основните тригонометрични уравнения $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\mathrm{tg}\, x=a$ и $\mathrm{cotg}\, x=a$, където a е реално число. Считаме, че читателят добре познава решенията на тези уравнения и ще ги използуваме без допълнителни коментари.

В тази статия ще бъдат разгледани някои характерни тригонометрични уравнения и начини за тяхното решаване. Ще се опитаме да спрем вниманието ви и на най-често срещаните грешки.

Тъй като често се налага да се опитват различни идеи, преди да се намери верният път, задължителни са доброто познаване на основните тригонометрични формули и умението грамотно да се извършват преобразувания с тях. Някои кандидат-студенти разчитат главно на четиризначните таблици, надявайки се, че с отварянето им веднага ще попаднат на необходимата формула. Това, разбира се, обикновено не става и те се озовават в лабиринт. По този повод ще си позволим да отправим към читателя един съвет — за да се научите да решавате добре тригонометричните уравнения, упражнявайте се достатъчно!

Добре е да се знае, че често е възможно едно тригонометрично уравнение да бъде решено по различни начини, като формата на записване на корените зависи от конкретно избрания начин. При това не винаги се вижда от пръв поглед, че два такива записа са еквивалентни. Много кандидат-студенти, след като са решили уравнението правилно, искат да го проверят, решавайки го по друг начин, и стигат до друга форма на отговора. Мислейки, че са сбъркали, те се опитват да открият несъществуващи грешки и губят много време за това. На изпита е достатъчно да се даде само едно, по възможност най-просто и кратко решение.

Друг важен момент, който често се пренебрегва, е, че в процеса на решаването могат да се появят чужди корени (например при повдигане на двете страни на четна степен или при умножаване на двете страни на уравнението с множител, който се анулира за някои стойности на неизвестното) или пък да се изпуснат корени (при съкращаване на общ множител в двете страни и др.). За да се избегнат тези опасности, е необходимо правилно да се определи дефиниционната област на уравнението и внимателно да се следи за еквивалентността на извършваните преобразувания. Във всички случаи, когато е необходимо, трябва да се прави проверка.

Напълно допустимо е решенията да се записват в градуси, въпреки че се предпочита да са в радиани, тъй като неизвестното се счита за число, а не за ъгъл. Грешно е в едно решение да участвуват едновременно и градуси, и радиани.

След тези предварителни бележки да преминем към разглеждането на характерни начини за решаването на тригонометрични уравнения, като всеки от тях ще илюстрираме с подходящ пример.

I. Привеждане на уравнението във вида $f(x)g(x)=0$, след което то се свежда до уравненията $f(x)=0$ и $g(x)=0$.

Задача 1. Да се реши уравнението

$$\sqrt{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\left(\operatorname{cotg}^2\frac{x}{2}-1\right)}=4\cos x.$$

Решение. Дефиниционната област на това уравнение се състои от всички реални $x\neq k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, тъй като за тези стойности една от функциите $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ или $\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$ не е дефинирана. Допълнителни ограничения не се налагат, защото както ще видим след малко, подкоренната функция е неотрицателна. Използувайки известни формули, преобразуваме лявата страна на уравнението по следния начин:

$$\sqrt{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\left(\operatorname{cotg}^2\frac{x}{2}-1\right)}=\sqrt{\frac{\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}}=\sqrt{\frac{4\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\frac{2|\cos x|}{|\sin x|}.$$

Така получихме уравнението $\frac{2|\cos x|}{|\sin x|}=4\cos x$. Ясно е, че трябва да търсим корените измежду онези x, за които $\cos x\geqq 0$. Следователно уравнението е еквивалентно с $\cos x\left(\frac{1}{2}-|\sin x|\right)=0$, чиито корени намираме, като решим последователно уравненията $\cos x=0$ и $|\sin x|=\frac{1}{2}$. Решенията на първото от тях са $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. За да решим второто уравнение, разглеждаме два случая:

а) Нека $\sin x>0$. Тогава уравнението е $\sin x=\frac{1}{2}$ и корените му са $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

б) Нека $\sin x<0$. В този случай уравнението е $-\sin x=\frac{1}{2}$ и корените са $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. Окончателно решенията на първоначалното уравнение са $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

II. Уравнения от вида $\varphi(f(x))-\varphi(g(x))=0$, където φ е някоя от функциите sin, cos, tg или cotg,

се свеждат към вида, разгледан в I, чрез формулите за преобразуване на разлика в произведение. Например уравнението $\sin f(x)-\sin g(x)=0$ е еквивалентно с $2\sin\frac{f(x)-g(x)}{2}\cos\frac{f(x)+g(x)}{2}=0$, което от своя страна се свежда до $\sin\frac{f(x)-g(x)}{2}=0$ и $\cos\frac{f(x)+g(x)}{2}=0$.

Задача 2. Да се реши уравнението

$$\cos x-\cos 17x=1+2\sin 8x\sin x-\cos 16x.$$

Решение. Уравнението е дефинирано за всички x. Извършваме следните еквивалентни преобразувания:

$$\cos x-\cos 17x=1+2\sin 8x\sin x-(1-2\sin^2 8x),$$
$$2\sin 8x\sin 9x=2\sin 8x(\sin x+\sin 8x),$$
$$4\sin 8x\sin\frac{9}{2}x\cos\frac{9}{2}x=4\sin 8x\sin\frac{9}{2}x\cos\frac{7}{2}x,$$
$$\sin 8x\sin\frac{9}{2}x\left(\cos\frac{9}{2}x-\cos\frac{7}{2}x\right)=0.$$

За да намерим корените на това уравнение, трябва да решим три уравнения. Първото е $\sin 8x=0$, чиито корени са $x=k\frac{\pi}{8}$, $k\in\mathbf{Z}$. Второто е $\sin\frac{9}{2}x=0$; корените му са $x=\frac{2k\pi}{9}$, $k\in\mathbf{Z}$. Лявата страна на третото уравнение $\cos\frac{9}{2}x-\cos\frac{7}{2}x=0$ преобразуваме във вид, удобен за логаритмуване, и получаваме, че то е еквивалентно със $\sin 4x\sin\frac{x}{2}=0$. Корените на последното намираме от уравненията $\sin 4x=0$ и $\sin\frac{x}{2}=0$. Те са $x=k\frac{\pi}{4}$, $x=2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. И така решенията на първоначалното уравнение са $x=k\frac{\pi}{8}$, $x=\frac{2k\pi}{9}$, $k\in\mathbf{Z}$.

III. Привеждане на уравнението във форма, съдържаща само една тригонометрична функция на един аргумент.

Полученото уравнение решаваме, като заместим тригонометричната функция с ново неизвестно и решим полученото алгебрично уравнение.

Задача 3. Да се реши уравнението

$$2\cos 2x\sin x+\cos^2\frac{x}{2}\sin x-10\cos^2\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\frac{7}{2}\sin x-\frac{1}{4}\sin 2x=0$$

Решение. Дефиниционната област на уравнението се състои от всички реални x. Използвайки тригонометричните формули, преобразуваме лявата страна на уравнението във форма, съдържаща само $\sin x$:

$$2\sin x(1-2\sin^2 x)+\frac{1}{2}(\cos x+1)\sin x-10\sin^2 x+\frac{7}{2}\sin x-\frac{1}{2}\sin x\cos x=$$
$$=2\sin x-4\sin^3 x+\frac{1}{2}\sin x\cos x+\frac{1}{2}\sin x-10\sin^2 x+\frac{7}{2}\sin x-\frac{1}{2}\sin x\cos x=$$
$$=-4\sin^3 x-10\sin^2 x+6\sin x.$$

Като положим $\sin x=u$, получаваме уравнението $u(2u^2+5u-3)=0$. Неговите корени са $u_1=0$, $u_2=\frac{1}{2}$ и $u_3=-3$. Следователно корените на началното уравнение ще намерим, като решим уравненията $\sin x=0$, $\sin x=\frac{1}{2}$ и $\sin x=-3$. Решенията на първите две са съответно $x=k\pi$ и $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. Третото уравнение няма корени. Окончателно решенията на задачата са $x=k\pi$, $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ и $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

IV. Уравнения от вида

$$a_0\sin^n x+a_1\sin^{n-1}x\cos x+\dots+a_{n-1}\sin x\cos^{n-1}x+a_n\cos^n x=0,$$

където $a_i\in\mathbf{R}$, $i=0,\dots n$ и $a_0\in0$,

се решават по следния начин: първо разделяме двете страни на уравнението на $\cos^n x$ (това е възможно, понеже $a_0\neq0$ и следователно уравнението няма корени, за които $\cos x=0$) и след това полагаме $\operatorname{tg}x=u$. Получаваме алгебрично уравнение от степен n относно u.

Задача 4. Да се реши уравнението

$$\sin^4x+\cos^4x=\frac{5}{8}.$$

Решение. Уравнението е дефинирано за всички реални x. Използувайки факта, че $(\sin^2x+\cos^2x)^2=1$, последователно получаваме:

$$\sin^4x+\cos^4x=\frac{5}{8}(\sin^2x+\cos^2x)^2$$

$$3\sin^4x+3\cos^4x-10\sin^2x\cos^2x=0.$$

Разделяме на $\cos^4x$ и полагаме $\operatorname{tg}x=u$. Уравнението приема вида $3u^4-10u^2+3=0$. Корените на това биквадратно уравнение са $u_{1,2}=\pm\sqrt{3}$, $u_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Следователно трябва да решим уравненията $\operatorname{tg}x=\pm\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Решенията им съответно $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ са и търсените решения на задачата.

Освен че илюстрира IV, разглежданият пример потвърждава твърдението, че някои тригонометрични уравнения могат да се решат по различни начини. По-долу привеждаме второ решение на уравнението от задача 4, което е по-добро от горното. След еквивалентните преобразувания

$$(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=\frac{5}{8},$$

$$1-\frac{1}{2}\sin^22x=\frac{5}{8},$$

$$\sin^22x=\frac{3}{4},$$

се получават уравненията $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin 2x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ с решения съответно $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ и $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

V. Да разгледаме уравнение от вида $R(\sin x, \cos x) = 0$, където R е рационална функция на $\sin x$ и $\cos x$,

т. е. функция, която може да се представи като частно на два полинома на променливите $\sin x$ и $\cos x$. Такъв е например всеки алгебричен израз, в който $\sin x$ и $\cos x$ са подложени на някои от четирите основни аритметични действия. В този случай е удобно да се използуват формулите

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

чрез които уравнението се свежда до рационално уравнение за $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тези формули нямат смисъл за $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, тъй като тогава $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не е определен. Затова отделно се проверява дали тези числа са корени на даденото уравнение.

Задача 5. Да се реши уравнението

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1.$$

Решение. Като положим $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u$ и заместим $\sin x$ и $\cos x$ с равните им за $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, получаваме уравнението

$$\frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2} + \frac{2u(1-u^2)}{(1+u^2)^2} - 1 = 0.$$

След привеждане под общ знаменател и разлагане на множители уравнението приема вида $2u(1-u)(u^2+u+2) = 0$. Реалните корени на това уравнение са $u_1 = 0$ и $u_2 = 1$. От $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$ и $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$ намираме съответно $x = 2k\pi$ и $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. С непосредствена проверка установяваме, че измежду $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ няма корени на даденото уравнение и следователно всичките му решения са $x = 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

В заключение предлагаме на вниманието на читателя един тест по тригонометрични уравнения, състоящ се от десет задачи с различна трудност. Чрез него даваме възможност да прецените сами доколко добре умеете да решавате тригонометрични уравнения, както и какви са пропуските в знанията ви, които трябва да попълните. Тестът сам по себе си е едно добро упражнение. Препоръчваме го и за кръжочна работа с учениците.

След всяка задача е посочен максималният брой точки, полагащи се за правилното ѝ решение. В зависимост от това, докъде сте стигнали с решението и доколко полученият от вас отговор е верен, за всяка задача поставете толкова точки, колкото сами прецените, като се опитате да бъдете справедливи. Оценяването направете, след като изтекат определените за теста 45 минути. Максималният брой точки, които можете да съберете, е 110, но получаването на 65 от тях е вече отличен резултат. Затова решавайте задачите в такъв ред, който според вас ще ви осигури максимален резултат. Сега можете да започнете. Желаем ви успех!

ТЕСТ ПО ТРИГОНОМЕТРИЧНИ УРАВНЕНИЯ

Да се решат уравненията:

1. $\sin 19x + 19\cos x = 20$ — 3 т.
2. $\cot g x + \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{1}{\sin x}$ — 3 т.
3. $(\cos x)^{\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}} = 1$ — 7 т.
4. $|\sin x| = \sin x + 2\cos x$ — 7 т.
5. $\sqrt{x}\sqrt{1-\sin x-\cos x} + \sqrt{\sin\dfrac{x}{2}\left(\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}\right)} = \operatorname{cotg}\dfrac{x}{4}$ — 10 т.
6. $\sqrt{\cos^2 2x + |\cos 2x| + \dfrac{1}{4}} = \cos\dfrac{20}{12}\pi$ — 10 т.
7. $2\cos x(\cos x - \sqrt{8}\operatorname{tg} x) = 5$ — 15 т.
8. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$ — 17 т.
9. $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1-\cos x}{1-\sin x}$ — 18 т.
10. $\dfrac{3\cos 5x - 2(\cos 6x + \cos 4x)}{3\sin 5x - 2(\sin 6x + \sin 4x)} = \operatorname{tg} 17x$ — 20 т.

ОТГОВОРИ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ ТЕСТА ПО ТРИГОНОМЕТРИЧНИ УРАВНЕНИЯ

1. Няма решение. **2.** Всички реални $x \neq (2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. **3.** $x = 2k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **4.** $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **5.** $x = 2\pi + 4k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **6.** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. **7.** $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **8.** $x = k\dfrac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$. **9.** $x = 2k\pi$ $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **10.** $x = \dfrac{\pi}{44} + \dfrac{\pi}{22}k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Резултати:

— Над 65 точки. Отлично, поздравяваме ви с успеха!

— Ако събраните от вас точки са между 45 и 65, вие добре познавате теорията, но вероятно ви липсва сръчност и бързина. Решавайте повече задачи и шансовете ви ще бъдат много добри.

— Броят на точките ви е между 30 и 45. Резултатът ви е добър, но вдъхва известна несигурност. Съветваме ви по време на подготовката си да отделите повече време за тригонометричните уравнения.

— Ако сте събрали под 30 точки, най-разумно е да се явите на онзи кандидатстудентски изпит, на който няма да се падне тригонометрично уравнение.