ЕЛЕМЕНТИ ОТ АНАЛИТИЧНАТА ГЕОМЕТРИЯ НА РАВНИНАТА
(Лекционни бележки и Задачи)

1. *Кратки уводни сведения.*

Тук ще се ограничим с въвеждането на някои формули, необходими при решаването на стандартен тип задачи по аналитична геометрия – за прави, триъгълници и окръжности. Знанията по аналитична геометрия от училищната математика са до голяма степен добра предварителна основа за самостоятелната работа върху предлаганите задачи. В този смисъл е полезно студентите първокурсници да опреснят досегашните си познания по математика въобще, в частност по аналитична геометрия, например от следните източници:

1) Станислава Петкова, Петьо Петков. Математика за 11 кл., изд. Прозорец & Труд, София, 2000 г.
2) Станислава Петкова, Петьо Петков. Математика за 12 кл. (Профилирана подготовка), изд. Совеал 97, София, 2002 г.

Необходимият университетски минимум знания по аналитична геометрия – като непосредствено следващо стъпало – може да се постигне и със самостоятелни занимания, с помощта на един вече не малък брой налична учебникова литература (в т.ч. – за технически, икономически и пр. университети). От определена полза могат да бъдат например следните учебници:

3) Марга Георгиева. Висша математика, изд. Абагар, 1995 г.
4) Марга Георгиева. Математика, изд. Абагар, 1995 г.

Като извънредно полезни би следвало да се препоръчат учебниците на известните руски математици Иван Привалов и Алексей Погорелов:

5) I. I. Privalov. Analytical Geometry in the plane (in Russian) – Moskow: Phis.-Math. Literature Pub., 1962.
6) A.V. Pogorelov. Analytical Geometry, Mir Pub. (Moskow), 1984 /също Analytical Geometry (in Russian) – Moskow: Nauka Pub., 1968; 2-nd ed. 1978./

<u>Формули за отсечки.</u>

Двете формули, които имаме предвид – за дължина на отсечка и за разделяне на отсечка в желано съотношение – са познати по принцип и от училищната математика . Сега накратко ги припомняме.

1.1. Дължина на отсечка (разстояние между две точки).

Дължината $|M_1M_2|$ на отсечка, с краища т. $M_1(x_1, y_1)$ и т. $M_2(x_2, y_2)$, намираме лесно най-напред в частните случаи на хоризонтална, т.е. успоредна на абсцисната ос, или вертикална (успоредна на ординатната ос) отсечка. В първия случай имаме $y_1 = y_2$

и тогава $|M_1M_2|=|x_2-x_1|$. Във валидността на последното равенство най-лесно се убеждаваме като построим ортогоналните проекции $M_1'(x_1,0)$, $M_2'(x_2,0)$ на точките M_1, M_2 върху абсцисната ос и използваме, че $|M_1M_2|=|M_1'M_2'|$; същевременно $|M_1'M_2'|$ е всъщност разстоянието между точките, чрез които сме обозначили числата x_1,x_2, което очевидно е $|x_2-x_1|$. По същия начин се вижда, че във втория случай (тогава $x_1=x_2$) имаме $|M_1M_2|=|y_2-y_1|$. Когато отсечката е наклонена (т.е. $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$) – това е типичното „общо положение" – можем да си послужим със следната елементарна спомагателна конструкция. През краищата M_1, M_2 прекарваме прави – съответно хоризонтална и вертикална; те се пресичат (направете чертеж !) в точка P, чиито коорднати са очевидно (x_2,y_1). За така конструирания правоъгълен ΔM_1M_2P прилагаме питагоровата теорема (че квадрата на хипотенузата е равен на сумата от квадратите на катетите): $|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|M_2P|^2$. Но от вече разгледаните частни случаи имаме, че $|M_1P|=|x_2-x_1|$, $|M_2P|=|y_2-y_1|$ и (от питагоровата теорема) стигаме до следната обща формула за дължината $|M_1M_2|$:

(1.1) $$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,.$$

1.2. Разделяне (деление, делене) на отсечка в дадено отношение.

Формулата, която ще разгледаме по-долу, произтича от следния въпрос, чиято практическа същност се вижда непосредствено. За дадена отсечка M_1M_2 се търси т. $M\in$ отс. M_1M_2 (т.е. т. M е вътрешна за отсечката), която да дели отсечката в желано (дадено по условие) съотношение $k_1:k_2$, считано от т. M_1; k_1,k_2 са (произволни) положителни числа. С други думи, търси се т. M (от отсечката), така че да е изпълнено равенството $\dfrac{|M_1M|}{|M_2M|}=\dfrac{k_1}{k_2}$. Задачата е да пресметнем координатите (x,y) на търсената т. M, чрез данните (координатите) на краищата $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ и числата k_1,k_2. За целта, както по-горе, да построим спомагателна двойка правоъгълни триъгълници, с хипотенузи съответно отсечките M_1M и M_2M (подразбира се, че сме направили чертеж, с т. M_1, разположена например по-високо и по-наляво от т. M_2 и т. M – някъде между M_1 и M_2). Прекарваме през M_1 и M съответно хоризонтална и вертикална права – те се пресичат в т. $P_1(x,y_1)$, и през M и M_2 – друга двойка (съответно) хоризонтална и вертикална права, пресичащи се в т. $P_2(x_2,y)$. (За уточнение да отбележим, че при така описаната конструкция, отс. MP_1 е вертикална, а отс. MP_2 – хорзонтална.) От подобието на ΔM_1MP_1 с ΔM_2MP_2, за двойките хоризонтални и вертикални катети – M_1P_1, MP_2 и P_1M, P_2M_2, следват равенствата: $\dfrac{|M_1P_1|}{|MP_2|}=\dfrac{k_1}{k_2}$, $\dfrac{|P_1M|}{|P_2M_2|}=\dfrac{k_1}{k_2}$. Първото от тези равенства веднага можем да запишем във вида $\dfrac{|x-x_1|}{|x_2-x|}=\dfrac{k_1}{k_2}$ (като изразим дължините на участващите отсечки по познатата формула); т.е. $\left|\dfrac{x-x_1}{x-x_2}\right|=\dfrac{k_1}{k_2}$. Но разликите $x-x_1$, $x-x_2$ имат различни знаци, защото числото x е между числата x_1,x_2 (тъй като т. M е между M_1 и M_2), следователно частното $\frac{x-x_1}{x-x_2}$ е отрицателно. Тогава $\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right| = (-1).\frac{x-x_1}{x-x_2} = \frac{x-x_1}{x_2-x}$ и равенството $\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right| = \frac{k_1}{k_2}$ добива вида $\frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{k_1}{k_2}$. По същия начин, от второто (вж. по-горе) равенство $\frac{|P_1M|}{|P_2M_2|} = \frac{k_1}{k_2}$ получаваме връзката $\frac{y-y_1}{y_2-y} = \frac{k_1}{k_2}$. Но тази и предходната връзка (за x-координатата) са всъщност двойка еднотипни уравнения (съответно за неизвестното x и неизвестното y). Решаването им веднага дава търсената двойка формули:

(1.2) $$x = \frac{k_2x_1 + k_1x_2}{k_1 + k_2},\ y = \frac{k_2y_1 + k_1y_2}{k_1 + k_2}.$$

Ако означим с k частното $\frac{k_1}{k_2}$, получените формули можем да запишем в следната, понякога предпочитана, форма:

(1.3) $$x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k},\ y = \frac{y_1 + ky_2}{1+k}.$$

<u>Параметрични уравнения на отсечка и права.</u>

От формулите (1.3) ще извлечем едно полезно разширение на традиционната гледна точка, която вече илюстрирахме. В първата от тях, записана като $x = \frac{1}{1+k}x_1 + \frac{k}{1+k}x_2$, да означим с t частното $\frac{k}{1+k}$ (ясно е, че $\frac{k}{1+k} < 1$); сега тя добива вида $x = (1-t)x_1 + tx_2$ (предвид, че очевидно $\frac{1}{1+k} = 1-t$). В последния израз за x обаче можем да гледаме на t не само като на число от отворения интервал $(0,1)$ (т.е. $0 < t < 1$), а като на параметър, който описва затворения интервал $[0,1]$: $0 \le t \le 1$. В частност, при $t = 0$ и $t = 1$, този израз ни дава абсцисата съответно на т. M_1 и т. M_2. Очевидно втората формула от (1.3) по същия начин води до аналогичен израз за y чрез параметъра t. Така стигаме до двойката формули:

(1.4) $$x = (1-t)x_1 + tx_2,\ y = (1-t)y_1 + ty_2\ (0 \le t \le 1).$$

Те са известни като <u>*параметрични уравнения на отсечка.*</u> Такова название е основателно, предвид следната естествена геометрична интерпретация. Да оставим параметъра t „плавно” да опише интервала $[0,1]$ и да проследим „движението” на т. M, чиито координати (x, y) изчисляваме по уравненията (1.4). При $t = 0$ т. M ще се намира в „началото” M_1 на отсечката, „плавно” ще „пълзи” по отсечката към другия край M_2 – при постепенното нарастване на t от 0 към 1, и ще съвпадне с т. M_2, при $t = 1$. Ако разширим даденото току-що (макар и нестрого) тълкуване, като осавим t да продължи нарастването си от 1 до $+\infty$, естествено е да очакваме, че т. M, „излизайки” извън отсечката, ще опише онзи лъч върху правата M_1M_2, с начало т. M_2, чиято посока е противоположна на посоката от M_2 към M_1. Непосредственото следващо предположение е, че ако оставим t да намалява от 0 до $-\infty$, напускайки отново отсечката, т. M сега ще се „движи” по лъча (върху правата M_1M_2), с начало т. M_1 и посока, противоположна на посоката от M_1 към M_2. Получихме още едно приложение на горните изрази:

(1.5) $$x = (1-t)x_1 + tx_2,\ y = (1-t)y_1 + ty_2\ (-\infty < t < +\infty).$$

Формулите (1.5) обикновено се наричат *параметрични уравнения на права.*

2. *Уравнения на права.*

а) Общо и декартово уравнение.

Когато се интересуваме дали едно равнинно множество от точки $M(x, y)$ (т.е. едно геометрично място на точки /Г.М.Т./ $M(x, y)$) представлява права линия в равнината, възниква едно естественото предположение по отношение на променливите (x, y) – това , както знаем, са координатите на т. M спрямо вече въведена правоъгълна (декартова) координатна система $\{O; Ox, Oy\}$, с център т. O и оси Ox (абсцисна ос), Oy (ординатна ос). Предположението е, че между променливите би следвало да има връзка (зависимост), при това линейна – т.е. x и y участват в нея само с първите си степени. С други думи, записана възможно най-общо, връзката следва да е от вида:

(2.1) $$ax + by + c = 0 \ \ (|a| + |b| \neq 0);$$

условието в скобите по-горе фактически се подразбира – поне една от величините a, b не е нула (иначе ще имаме и $c = 0$ и връзката (2.1) се превръща в безсмисленото равенство $0 = 0$). Такава връзка наричаме *общо уравнение на права*. В нея a, b, c са константи (числа), a, b обикновено се наричат (главни) коефициенти, а c – свободен член. Пълното изследване на горния израз непосредствено показва, че – при дадена тройка числа a, b, c ($|a| + |b| \neq 0$) – Г.М.Т. $M(x, y)$, чиито координати удовлетворяват (2.1), е права линия и обратно – за всяка права в равнината има тройка числа a, b, c, така че равенството (2.1) е изпълнено за координатите (x, y) на всяка т. M от дадената права. Първата стъпка в такова изследване, това са основните частни случаи: $a = 0\,(b \neq 0)$; $b = 0\,(a \neq 0)$; $c = 0$ ($a \neq 0, b \neq 0$). За всеки от тези случаи лесно можем да се убедим, че имаме Н.Д.У. (необходимо и достатъчно условие) съответно за: *права, успоредна на* Ox ($a = 0$); *права, успоредна на* Oy ($b = 0$); *права (минаваща) през координатното начало, т.* O ($c = 0$). Като втора стъпка остава случаят на „права в общо положение” ($a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$), т.е. – типично наклонена права. Сега, решавайки (2.1) относно y, получаваме израз от вида

(2.2) $$y = kx + l\,.$$

Горното съотношение се нарича *декартово уравнение на права*; числата k и l се наричат съответно ъглов и отрезов коефициент. Названията им подсказват техния геометричен смисъл: за l веднага се вижда, като заместим с $x = 0$ в уравнение (2.2), че точката, в която правата с уравнение (2.2) пресича ординатната ос Oy, има ордината $y = l$, т.е. т.н. вертикален отрез на правата има стойност l. Относно смисъла на коефициента k, най-напред ще уточним понятието *(ориентиран) ъгъл на наклона на правата* (спрямо оста Ox). Да заместим в уравнението този път с $y = 0$, получаваме абсцисата $x = -\dfrac{l}{k}$ на т. $Q \in Ox$, в която правата (с уравнение (2.2)) пресича абсцисната ос. (Да припомним, че тъкмо координатната насочена отсечка $\overrightarrow{OQ}$ - с посока от т. O към т. Q - е т.н. хоризонтален отрез на правата, аналогично насочената отсечка $\overrightarrow{OL}$ е споменатият по-горе вертикален отрез: краят, т. $L(0, l)$, на тази отсечка е именно пресечната т. на правата от (2.2) с оста Oy; насочените отсечки върху координатните оси, с начало т. O, наричаме също алгебрични отсечки. Всяка такава отсечка има еднозначно определна стойност – например за стойностите на $\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{OQ}$ имаме съответно $\overrightarrow{OL} = l$, $\overrightarrow{OQ} = -\dfrac{l}{k}$.) Нека например $l > 0$, $\dfrac{l}{k} > 0$, т.е. т. L е над т. O, а т. Q -

вляво от т. O (направете чертеж !). Да завъртим около т. Q лъча Qx от абсцисната ос, с начало т. Q и посока – положителната посока на Ox, до съвпадането му с правата от (2.2). Очевидно въртенето можем да извършим в две противоположни посоки: обратно на часовниковата стрелка, и по часовниковата стрелка. Да означим ъглите, описани при тези завъртания, съответно с φ^+ и φ^-, като първият има положителна стойност, а вторият – отрицателна. Двата ъгъла са съседни – с общо рамо Qx и сумата от големините (мерките) им е 180^0 (или π радиана). Това означава, че $tg\varphi^+ = tg\varphi^-$; по тази причина под ъгъл на наклона, φ, разбираме кой да е от двата φ^+, φ^-. Да пресметнем $tg\varphi$: от правоъгълния $\Delta\, OLQ$ (при даденото по-горе разположение на т. Q и т. L) имаме, че $<)LQO = \varphi^+$; освен това $tg[<)LQO] = \dfrac{|OL|}{|QL|} = \dfrac{l}{l/k} = k$, следователно $tg\varphi = tg\varphi^+ = k$. Т.е. коефициентът k, това е тангенсът на ъгъла на наклона.

б) Успоредни и перпендикулярни прави.

Нека $p_1 : y = k_1 x + l_1$, $p_2 : y = k_2 x + l_2$ са две прави с декартови уравнения. Знаем от планиметрията, че Н.Д.У. две прави да са успоредни е да пресичат трета права под един и същи ъгъл и понеже абсцисната ос е една възможност за трета права (с която p_1 и p_2 сключват съответно ъгли φ_1 и φ_2), заключаваме, че $p_1 // p_2 \Leftrightarrow tg\varphi_1 = tg\varphi_2$, следователно имаме:

(2.3) $k_1 = k_2$ (<u>*условие за успоредност*</u>).

Отново използвайки геометричния смисъл на ъгловия коефициент, не е трудно да открием и условието за перпендикулярност.Да разсъждаваме например по следния елементарен начин. От условието за успоредност е очевидно, че $p_1 \perp p_2 \Leftrightarrow$ правите $q_1 : y = k_1 x$, $q_2 : y = k_2 x$ (през координатното начало) са взаимно перпендикулярни. Ясно е, че необходимо условие последните две да са перпендикулярни е едната (напр. q_1) да лежи в 1-ви и 3-ти квадрант, а другата (q_2) – във 2-ри и 4-ти; в такъв случай ще имаме, че $k_1 > 0$, $k_2 < 0$. Понеже ъгълът φ_2^+ сега е тъп, а φ_1^+ – остър, виждаме, че – посредством спомагателна двойка точки $M_1 \in q_1$, $M_2 \in q_2$ – ъгълът M_2OM_1 (между правите q_1, q_2) е равен на разликата $\varphi_2^+ - \varphi_1^+$ и следователно е прав $\Leftrightarrow$ $ctg(\varphi_2^+ - \varphi_1^+) = 0$. Но, съгласно тригонометрията, $ctg(\varphi_2^+ - \varphi_1^+) = \dfrac{1 + ctg\varphi_1^+ .ctg\varphi_2^+}{ctg\varphi_1^+ - ctg\varphi_2^+}$ и интересуващият ни ъгъл ще е прав $\Leftrightarrow$ $1 + ctg\varphi_1^+ .ctg\varphi_2^+ = 0$, откъдето за коефициентите k_1, k_2 веднага намираме:

(2.4) $k_1 k_2 = -1$ (<u>*условие за перпендикулярност*</u>).

За практически цели, когато например е даден коефициентът k_1, а се търси k_2, така че $p_1 \perp p_2$, горната фомула обикновено използваме във вида $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$.

В случай на прави с общи уравнения, $p_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, $p_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$, лесно можем да получим условията за успоредност и перпендикулярност – посредством вече известните (2.3), (2.4). Когато и двете прави са невертикални, т.е. $b_1, b_2 \neq 0$, те очевидно имат коефициенти на наклона съответно $k_1 = -\dfrac{a_1}{b_1}$, $k_2 = -\dfrac{a_2}{b_2}$ и от (2.3), (2.4) веднага получаваме, че успоредност или перпендикулярност ще е налице, съответно при $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ или $\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} = -1$. Да преработим сега последните две равенства, като се освободим от знаменателите. Така получаваме, както следва:

(2.5) $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ (<u>*условие за успоредност*</u>);

(2.6) $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$ (<u>*условие за перпендикулярност*</u>).

Коментар. Непосредствено може да се провери (това се препоръчва като леко самостоятелно упражнение), че условията (2.5), (2.6) остават валидни (в смисъл на Н.Д.У.) и ако някоя от правите е вертикална. *Забележка.* За прави в „общо положение”, условието за успоредност можем да използваме във формата $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, което фактически означава, че правите са успоредни $\Leftrightarrow$ главните им коефициенти са съответно пропорционални.

Някои приложения – стандарни елементи за съставяне на уравнения.

Дадена е т. $M_0(x_0, y_0)$ и права „еталон”, $p_0 : y = k_0 x + l_0$ (с декартово уравнение), която – като обща ситуация – не минава през дадената точка (но не изключваме и случая $M_0 \in p_0$). Търси се права p (с декартово уравнение), минаваща през т. M_0, която да е успоредна или пък перпендикулярна на „еталона” p_0. Неизвестната права ще търсим с уравнение $p : y = kx + l$ (където коефициентите k и l са неизвестни); от изискването $M_0 \in p$ (т.е. т. M_0 да лежи върху p) следва, че $y_0 = kx_0 + l$. Като извадим почленно последното равенство от израза $y = kx + l$ (за уравнението на p), получаваме следното съотношение (в което неизвестното l е фактически елиминирано):

(2.7) $y - y_0 = k(x - x_0)$ (<u>*декартово уравнение на права през точка*</u>).

Забележка. Названието в скобите, по отношение на израза от (2.7), е добило популярност тъкмо в тази форма, но всъщност, понеже засега k е произволно реално число, израза (2.7) представлява всевъзможните прави (без успоредната на Oy), минаващи през т. M_0; т.е. (2.7) е всъщност уравнение – „от декартов тип” – на целия сноп прави (без една), през т. M_0. Сега, за да решим нашата задача (за права p, успоредна или перпендикулярна на p_0), остава единствено да определим коефициента k; т.е., както се вижда съответно от (2.3) и (2.4), просто трябва да вземем $k = k_0$ (за $p // p_0$) или $k = -\frac{1}{k_0}$ (за $p \perp p_0$). С други думи, при дадени т. M_0 и права $p_0 : y = k_0 x + l_0$, остава „автоматично” да съставим израза $y - y_0 = k_0(x - x_0)$, който можем да наричаме *декартово уравнение* (в изходна форма) *на права през дадена точка, успоредна на дадена права*, или пък израза $y - y_0 = -\frac{1}{k_0}(x - x_0)$ – *декартово уравнение* (в изходна форма) *на права през дадена точка, перпендикулярна на дадена права*.

Когато имаме да решаваме същата задача (в кой да е от двата варианта), но с права „еталон” $p_0 : a_0 x + b_0 y + c_0 = 0$ (дадена с общо уравнение), както по-горе, последователно ще имаме следното. Сега търсим права $p : ax + by + c = 0$ (с общо уравнение) и от $M_0 \in p$ получаваме равенството $ax_0 + by_0 + c = 0$, което – почленно извадено от $ax + by + c = 0$ – ни води до израза:

(2.8) $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ (<u>*общо уравнение на права през точка*</u>).

Забележка. И тук всъщност се касае за уравнение на целия сноп прави през т. M_0 (този път включително и правата, успоредна на Oy).

От условието за успоредност на прави (всяка, дадена с общо уравнение), знаем, че израза (2.8) ще представя Г.М.Т. – права, успоредна на p_0, само за двойки коефициенти (a,b) от вида $a = Ka_0$, $b = Kb_0$ (K е число, различно от нула). Предвид че израза $Ka_0(x - x_0) + Kb_0(y - y_0) = 0$ очевидно задава едно и също Г.М.Т., $\forall K \neq 0$, достатъчно е да вземем $K = 1$. Когато се търси права $p \perp p_0$ (през т. M_0), зададена с общо уравнение, ако първоначално предположим, че p_0 и p не са успоредни на Oy, удобно е да използваме техните коефициенти на наклона – съответно $-\frac{a_0}{b_0}$ и $-\frac{a}{b}$; прилагайки условието за перпендикулярност (2.4), получаваме равенството $\frac{a}{b} = -\frac{b_0}{a_0}$, което ще е изпълнено за всички двойки (a,b): $a = Kb_0$, $b = -Ka_0$ (където $K \neq 0$ е произволно число). Заествайки с последните изрази за a и b в (2.8), получаваме, че ($\forall K \neq 0$) съотношението $Kb_0(x - x_0) - Ka_0(y - y_0) = 0$ ще представлява права, през т. M_0, перпендикулярна на дадената $p_0 : a_0x + b_0y + c_0 = 0$. (Елементарно се проверява, че това заключение остава валидно и в случаите $a_0 = 0, b_0 \neq 0$ ($p_0 // Ox$) и $b_0 = 0, a_0 \neq 0$ ($p_0 // Oy$), които по-горе бяха за момент пренебрегнати.) Познатите ни вече съображения означават, че и сега е достатъчно да вземем $K = 1$. По този начин се убедихме, че (при използване на общи уравнения), когато са дадени т. M_0 и права $p_0 : a_0x + b_0y + c_0 = 0$, пак „автоматично”, трябва да съставим – този път – израза $a_0(x - x_0) + b_0(y - y_0) = 0$, който можем да наричаме *общо уравнение* (в изходна форма) *на права през дадена точка, успоредна на дадена права*, или пък израза $b_0(x - x_0) - a_0(y - y_0) = 0$ – *общо уравнение* (в изходна форма) *на права през дадена точка, перпендикулярна на дадена права*.

Уравнения на права през две точки и някои приложения.

Когато са дадени две точки, $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, съгласно планиметрията, през тях минава единствена права. Да предположим най-напред, че $x_1 \neq x_2$ (т.е. правата M_1M_2 не е вертикална). Понеже M_1M_2 е права през т. $M_1(x_1, y_1)$, от (2.7) следва, че тя има декартово уравнение във вида $y - y_1 = k(x - x_1)$, а като заместим в това уравнение с координатите на т. M_2 (тъй като и $M_2 \in M_1M_2$), веднага изчисляваме, че $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Така получихме уравнението:

(2.9) $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ (*декартово уравнение на права през 2 точки*).

Сега да преобразуваме горния израз като се освободим от знаменателя $x_2 - x_1$: получаваме следния израз:

(2.10) $(y_2 - y_1)(x - x_1) + (x_1 - x_2)(y - y_1) = 0$ (*общо уравнение на права през 2 точки*).

Коментар. Сравнен с (2.8), горният израз очевидно е общо уравнение на права през една точка – това е т. M_1, с коефициенти $a = y_2 - y_1$, $b = x_1 - x_2$. Освен това, като заместим (текущите координати x, y) в уравнение (2.10) с координатите на т. $M_2(x_2, y_2)$, виждаме, че и втората точка лежи върху правата с уравнение (2.10). Да отбележим също, че и при $x_1 = x_2$ (тогава $y_1 \neq y_2$) изразът (2.10) е уравнение на правата M_1M_2.

Нека, освен M_1 и M_2, е дадена и точка $M_*(x_*, y_*)$, и се търси (уравнение на) права p през т. M_*, успоредна или пък перпендикулярна на правата M_1M_2. Ако искаме да съставим декартово уравнние, във вече известните „шаблони” $y - y_0 = k_0(x - x_0)$ или $y - y_0 = -\frac{1}{k_0}(x - x_0)$ трябва да заместим k_0 с ъгловия коефициент $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ на правата M_1M_2 и x_0, y_0 – съответно с x_*, y_*; получаваме следните уравнения:

$$y - y_* = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_*) \ (p // M_1M_2); \ y - y_* = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1}(x - x_*) \ (p \perp M_1M_2).$$

Когато трябва да съставим общо уравнение на търсената права p, разсъждаваме по същия начин, използвайки горепосочените схеми за общо уравнение и главните коефициенти $a = y_2 - y_1$, $b = x_1 - x_2$, от известното вече общо уравнение на M_1M_2. Така ще получим уравненията:

$$(y_2 - y_1)(x - x_*) + (x_1 - x_2)(y - y_*) = 0 \text{ (в случая } p // M_1M_2\text{);}$$
$$(x_1 - x_2)(x - x_*) + (y_1 - y_2)(y - y_*) = 0 \text{ (в случая } p \perp M_1M_2\text{).}$$

в) Разстояние от точка до права.

Нека $M_0(x_0, y_0)$ и $p : ax + by + c = 0$ са дадени точка и права, като т. M_0 не лежи на правата. За повече конкретност (направете чертеж !) да си мислим например, че т. M_0 е във втори квадрант, а p е „низходяща” (т.е. „слизаща”) права, която пресича осите Ox и Oy съответно в т. Q (вляво от т. O) и т. A (под т. O); т.е. и двата отреза, $\overrightarrow{OQ} = -\frac{c}{a}$, $\overrightarrow{OA} = -\frac{c}{b}$ са отрицателни. Да прекараме през т. M_0 правата p', успоредна на p. Ясно е, че разстоянието $|\rho(x_0, y_0)|$ – от т. M_0 до правата p, това е разстоянието между p и p'. За да го пресметнем по удобен начин, да означим с B пресечната точка на p' с ординатната ос Oy и да спуснем от т. A перпендикуляра AC към p' (т. C, лежаща върху p', е петата на перпендикуляра). Очевидно $|AC| = |\rho(x_0, y_0)|$ и остава да пресметнем дължината $|AC|$. От правоъгълния ΔABC имаме $|AC| = |AB|\cos\alpha$, където $\alpha = \sphericalangle BAC$ (острият ъгъл при върха A). Да отбележим, че правата p има остър ъгъл на наклона $\varphi^- = -\sphericalangle OQA$, а от друга страна, $\sphericalangle OQA = \sphericalangle BAC$ – от подобието на ΔQAO и ΔABC. Значи $\cos\alpha = \cos\varphi^-$ и като изразим $\cos\varphi^-$ чрез $tg\varphi^-$, ще можем да пресметнем $\cos\alpha$ посредством главните коефициенти a, b от уравнението за p (предвид че $tg\varphi^- = -\frac{a}{b}$). От тригонометрията е известна (и се проверява непосрествено) формулата $1 + tg^2\varphi^- = \frac{1}{\cos^2\varphi^-}$, откъдето последователно получаваме: $\cos\varphi^- = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\varphi^-}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2/b^2}}$, $\Rightarrow$ $\cos\alpha = \cos\varphi^- = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Следващата стъпка е да пресметнем дължината $|AB|$ на хипотенузата (в ΔABC) – чрез данните за т. M_0 и правата p. Ако y_A и y_B са ординатите съответно на т. A и т. B, то $|AB| = |y_B - y_A|$; знаем, че $y_A = -\frac{c}{b}$, а за да намерим y_B, за правата p' (като минаваща през т. M_0 и успоредна на p) ще използваме уравнението $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, т.е. – след разкриване на скобите – $p': ax + by - (ax_0 + by_0) = 0$. При $x = 0$, получаваме $y = \dfrac{ax_0 + by_0}{b}$, което е търсената стойност на y_B. Сега $|y_B - y_A| = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b|}$ и заместайки от тук и полученото за $\cos\alpha$ в равенството $|AC| = |AB|\cos\alpha$, за интересуващото ни разстояние $|\rho(x_0, y_0)| = |AC|$ намираме следната формула:

(2.11) $$|\rho(x_0, y_0)| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ориентирано разстояние, нормално уравнение на права, приложение.

Когато е дадена права p чрез общо уравнение, с главни коефициенти a, b, за произволна т. $M(x, y)$ в равнината можем да пресметнем величината

(2.12) $$\rho(x, y) = \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

която обикновено се нарича *ориентирано разстояние* – от т. $M(x, y)$ до правата p. В последния израз, сравнен с дадения в (2.11), очевидно сме отстраниали знака “| . |” – за абсолютна стойност на сумата $ax + by + c$, и по този начин „разстоянието” от формула (2.12) може да бъде и отрицателно число. Такова разширение на понятието „разстояние” – като „разстояние със знак” (или оиентирано разстояние) има известно предимство: за точки $M(x, y)$, лежащи в противоположни полуравнини спрямо p, ориентираните им разстояния $\rho(x, y)$ имат противоположни знаци. С други думи, пресмятайки за някаква конкретна точка $M_0(x_0, y_0)$ ориентираното разстояние $\rho(x_0, y_0)$ (по формула (2.12)), освен фактическата й отдалеченост $|\rho(x_0, y_0)|$ от правата p, установяваме и дали е „под” или „над” правата.

За точки $M(x, y)$, лежащи върху правата, т.е. на разстояние $\rho(x, y) = 0$, от (2.12) получаваме уравнението:

(2.13) $$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0;$$

то е известно под названието *нормално уравнение на права.*

<u>Уравнения на ъглополовящи.</u>

Като приложение на формулите за разстояние, ще обсъдим един полезен начин за бързо съставяне на уравнения на ъглополовящи. Нека в Δ-ка ABC страните AC и BC са дадени чрез уравненията на правите $p_1 = AC$ и $p_2 = BC$, $p_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $p_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Освен това са дадени и координатите на върховете A и B. Търсят се уравенията на ъглополвящите. Ще съставим уравнение за ъглополовящата l_C – на ъгъла при върха C. Знаем, че ъглополовящата е Г.М.Т. $M(x, y)$, равноотдалечени от рамeнете на съответния ъгъл. В случая, $\forall$ т. $M(x, y) \in l_C$ ще е изпълнено равенството $|\rho_1(x, y)| = |\rho_2(x, y)|$, където $|\rho_1|, |\rho_2|$ са разстоянията съответно до правите p_1, p_2. Това равенство обаче е валидно и за точките от ъглополовящата l'_C – на външния ъгъл (съседен на $\sphericalangle ACB$) при върха C, понеже правите p_1, p_2 са рамене и за външния ъгъл. Следователно за ориентираните разстояния ρ_1, ρ_2 ще имаме: $\rho_1(x, y) = \pm\rho_2(x, y)$; т.е. за множеството, състоящо се от двете прави l_C, l'_C са в сила двойката съотношения:

(2.14) $$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Едното от тях, $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ или $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = -\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$, е интересуващото ни уравнение (в изходна форма) на ъглополовящата l_C, а другото се отнася за l'_C. Във всяка конкретна задача окончателния избор осъществяваме чрез следния прост тест. Избираме произволна точка $M_*(x_*, y_*)$ от вътрешността на ΔABC и сравняваме знаците на числата $\frac{a_1x_*+b_1y_*+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}$ и $\frac{a_2x_*+b_2y_*+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$. Ако например тези знаци са различни, уравнението на l_C е второто от последните две (когато знаците съвпадат, уравнението на l_C е $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$). Във валидността на дадения тест можем да се убедим по елементарен начин: първо, понеже вътрешността на ΔABC е изцяло в съответната зона „под” или „над” по отношение на всяка от правите p_1, p_2, всяко от ориентираните разстояния ρ_1, ρ_2 ще има един и същи знак в точките от вътрешността; второ, за да са равни две величини, например ρ_1 и $-\rho_2$, за точките от дадена ъглополовяща, очевидно е необходимо да имат еднакви знаци.

3. *Уравнения на окръжност и допирателна.*

а) Уравнение на окръжност.

Окръжността е Г.М.Т. $M(x, y)$ в равнината, равноотдалечени (на разстояние r – радиус на окръжността) от фиксирана точка – център на окръжността. Нека т. $Q(\alpha, \beta)$ е центърът, тогава – от формулата за дължина на отсечка – за разстоянието между M и Q ще имаме: $|QM| = \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$. Условието, че това разстояние е постоянна величина (равна на радиуса), очевидно е: $|QM| = r$, т.е. $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = r$. Последното равенство не променя същността си след повдигане в квадрат, а полученият израз е технически по-удобен:

(3.1) $$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = r^2 .$$

Съотношението (3.1) е естественото уравнение на окръжност, с дадени център и радиус; можем да го наричаме *стандартно уравнение на окръжност.*

Ако разкрием скобите в лявата част на (3.1), подредим по степените на x и y и прехвърлим r^2 в ляво, ще получим израз, който е частен случай от следната възможно най-обща форма, съдържаща едночлени от втора степен, x^2, y^2, xy:

(3.2) $$ax^2+bxy+cy^2+a_1x+b_1y+c_1 = 0 .$$

Съотношението (3.2) наричаме *общо уравнение на крива от втора степен.* В него a, b, c и a_1, b_1, c_1 са константи (числа) – наричаме ги коефициенти на уравнението; a, b, c са главните коефициенти и поне един от тях се предполага различен от нула, а коефициента c_1 обикновено наричаме свободен член. Първият въпрос, който възниква, когато е дадена произволна шесторка числа, a, b, c и a_1, b_1, c_1 (като $|a|+|b|+|c| \neq 0$), е какво е (ако съществува) съответното Г.М. от точки $M(x, y)$, чиито координати (x, y) удовлетворяват съотношението (3.2). Всяко такова Г.М.Т. (освен ако е празното множество) наричаме *крива от втора степен.* Вече знаем (от (3.1), записано като $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2 = 0$), че има криви от втора степен, които са окръжности. Важен следващ въпрос е какви други (и колко са) видове криви от втора степен съществуват. Тук няма да обсъждаме този въпрос. Ще се ограничим с илюстрирането на една елементарна процедура за определяне дали една крива е окръжност. Да разгледаме следния

Пример. Дадена е кривата κ: $2x^2+2y^2-8x+3y+6=0$. Да се докаже (да се провери), че тя е окръжност. Да се намерят центърът и радиусът на окръжността.

Решение: Разделяме почленно на числото 2 уравнението – получаваме следното еквивалентно уравнение (представляващо същото геометрично място) : $x^2+y^2-4x+\frac{3}{2}y+3=0$. Членовете в лявата част допълваме до точни квадрати по следния начин: $x^2-4x\pm 4+y^2+2.\frac{3}{4}y\pm\frac{9}{16}+3=0$; от тук непосредствено получаваме уравнението $(x-2)^2+\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$ (което, разбира се, също е еквивалентно с изходното). Последното обаче е стандартно уравнение на окръжност, следователно дадената крива κ е окръжност – с радиус $r=\frac{5}{4}$ и център т. $Q(2,-\frac{3}{4})$. /*Направете чертеж !/*

б) Уравнение на допирателна.

Ако е дадена окръжност κ: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ и точка (x_0,y_0) върху нея, т.е. $(x_0,y_0)\in\kappa$, ще се убедим, че допирателната t_0 – към окръжността, през т. (x_0,y_0) – има уравнение в следната (изходна) форма.

(3.3) $$t_0:(x_0-\alpha)(x-\alpha)+(y_0-\beta)(y-\beta)=r^2.$$

Коментар. Даденото уравнение за допирателната по очевиден начин се дообработва до стандартната форма за общо уравнение на права, след разкриване на съответните скоби и приведение: $(x_0-\alpha)x+(y_0-\beta)y+\alpha^2+\beta^2-(\alpha x_0+\beta y_0+r^2)=0$. Изходната форма (3.3) има удобсвото, че се съставя „автоматично”, като направо „копираме” уравнението на кривата: в квадратния едночлен $(x-\alpha)^2$, записан като $(x-\alpha).(x-\alpha)$, подменяме единия от множителите $(x-\alpha)$ с $(x_0-\alpha)$, където x_0 е абсцисата на допирната точка; по същия начин постъпваме и с едночлена $(y-\beta)^2$.

Във валидността на уравнението $(x_0-\alpha)(x-\alpha)+(y_0-\beta)(y-\beta)=r^2$ – като представящо тъкмо допирателната през т. (x_0,y_0), към окръжността – можем да се убедим по следния начин. Нека ρ_0 е радиалната права през т. (x_0,y_0) (т.е. правата през точките (α,β) – център на окръжността, и (x_0,y_0)). По вече известната схема за общо уравнение на права през две дадени точки (вж. формулите по-горе), ρ_0 има уравнение във вида (изходна форма): $(y_0-\beta)(x-\alpha)+(\alpha-x_0)(y-\beta)=0$. Понеже t_0 е права през т. (x_0,y_0), тя ще има общо уравнение в изходната форма $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$; коефициентите a,b намираме „автоматично” – от перпендикулярността между t_0 и ρ_0 – като разместим местата на главните коефициенти $(y_0-\beta)$ и $(\alpha-x_0)$ от уравнението за ρ_0 и сменим знака на единия от тях, например на втория; така получаваме $a=x_0-\alpha, b=y_0-\beta$ и уравнението за t_0 добива вида: $(x_0-\alpha)(x-x_0)+(y_0-\beta)(y-y_0)=0$. Да преработим първия едночлен от лявата част на това уравнение по следния начин: $(x_0-\alpha)(x-x_0)=(x_0-\alpha)(x-x_0\pm\alpha)=(x_0-\alpha)(x-\alpha)-(x_0-\alpha)^2$; аналогично, за втория имаме: $(y_0-\beta)(y-y_0)=(y_0-\beta)(y-\beta)-(y_0-\beta)^2$. Сега заместваме в уравнението по-горе с полученото за $(x_0-\alpha)(x-x_0)$ и $(y_0-\beta)(y-y_0)$, като вземем предвид че т. (x_0, y_0) удовлетворява уравнението на окръжността, т.е. $(x_0-\alpha)^2+(y_0-\beta)^2=r^2$; така получаваме очаквания израз: $(x_0-\alpha)(x-\alpha)+(y_0-\beta)(y-\beta)=r^2$.

4. *Задачи за прави и триъгълници.*

А) Задачи за права през точка, успоредна или перпендикулярна на друга.

1. Даден е четириъгълникът *ABCD* с върхове: т.*A(2,2),* т.*B(5,1),* т. *C(3,6)* и т. *D(0,3).*

а) Проверете, че върховете *A, C* и *B, D* лежат съответно върху правите с уравнения *y = 4x – 6* и *2x + 5y – 15 = 0*;

б) Намерете пресечната точка на диагоналите на четириъгълника.

2. Напишете уравнението на правата *p*:

а) през т.*M(-2,3)*, успоредна на оста *Ox* (*Oy*);

б) през координатното начало (т.*O*), успоредна на правата *q: y=2x+3;*

в) през т.*M(-2,3)*, успоредна на ъглополовящата на първи квадрант.

3. Напишете уравнението на правата *p*:

а) през т. *M(-2,3)*, успоредна на правата *q: y = 4x – 7*;

б) през т. *O*, перпендикулярна на правата *l: y = x/3 – 1*;

в) през т. *M(-2,3)*, перпендикулярна на правата *m: y = x/2 + 8.*

4. Дадени са точките *M(2,-3)* и *A(1,2), B(-1,-5),* и т-те *N(1,1)* и *C(4,3), D(-2,1).*

а) Напишете уравнението на правата *p* през т. *M*, успоредна на правата *AB* (през т-те *A, B*);

б) Напишете уравнението на правата *q* през т. *N*, перпендикулярна на правата *CD* (през т-те *C, D*).

5. Намерете пресечните точки на правата *p: y = 5x + 1* с координатните оси и напишете уравненията на правите q_1, q_2 през тези точки, перпендикулярни на *p*.

6. Намерете пресечната т. *M* на правите p_1 *: x – 2y –5 = 0* и p_2 *: 2x–3y -- 8 = 0*, и напишете уравнението на правата *p* през т. *M,* успоредна на правата *q: 3x – 2y + 2 = 0.*

7. Дадени са правите p_1*: x – y – 3 = 0,* p_2*: 2x + 3y – 11 = 0* и q_1*: 3x – y – 3 = 0,* q_2*: 4x + 3y – 4 = 0.*

а) Напишете уравнението на правата *p* през пресечната т. на p_1 и p_2, успоредна на правата *l: 5x – 4y – 17 = 0*;

б) Напишете уравнението на правата *q* през пресечната т. на q_1 и q_2, перпендикулярна на правата *m: 3x – y – 3 =0.*

Б) Задачи за височини, симетрали и медиани в триъгълник.

8. Страните на триъгълник имат уравнения: *x + 3y – 2 = 0, 2x + y + 5 = 0* и *3x – 4 = 0.* Напишете уравненията на височините.

9. Дадени са правите *p: 4x + 3y – 12 = 0* и *q: 3x + 2y – 5 = 0.*

а) Намерете т. *M* върху *p,* равноотдалечена от т-те *A(-1,-2)* и *B(1,4);*

б) Намерете т. *N* върху *q,* равноотдалечена от т-те *C(-1,-1)* и *D(3,3).*

10. Дадени са два триъгълника с върхове съответно *$A_1(0,5)$, $B_1(1,-2)$, $C_1(-6,5)$* и *$A_2(2,3)$, $B_2(4,2)$, $C_2(-1,0)$*.

а) Напишете уравненията на симетралите на *$\Delta A_1B_1C_1$* и намерете центъра на описаната окръжност;

б) Направете същото за *$\Delta A_2B_2C_2$*.

11. Дадени са два триъгълника с върхове съответно *$A_1(0,1)$, $B_1(1,0)$, $C_1(1,1)$* и *$A_2(2,1)$, $B_2(0,7)$, $C_2(-4,-1)$*.

а) Напишете уравненията на медианите на *$\Delta A_1B_1C_1$* и намерете медицентъра на триъгълника;

б) Направете същото за *$\Delta A_2B_2C_2$*.

12. В *ΔABC* са дадени върховете *$A(2,2)$, $B(3,0)$* и медицентъра т. *$M(3,1)$*. Намерете (координатите на) върха *C*.

В) Задачи за разстояние от точка до права и ъглополовящи.

13. Намерете дължините на височините на триъгълника с върхове *$A(5,-3)$, $B(0,-1)$, $C(3,3)$*.

14. Намерете разстоянията от координатното начало до правите *$p: 15x - 8y - 51 = 0$* и *$q: 4x + 3y + 35 = 0$*, и (координатите на) петите на перпендикулярите от к. начало до правите.

15. Намерете разстоянието между правите *$p: 5x - 12y + 28 = 0$* и *$q: 5x - 12y + 15 = 0$*.

16. Върху правата *$l: x + 3y = 0$* намерете точка, равноотдалечена от координатното начало и правата *$m: x + 3y - 2 = 0$*.

17. В *ΔABC* върхът *A* е пресечната т. на правите *$p: x + 8y - 16 = 0$* и *$q: 4x + 7y + 28 = 0$*, а другите върхове съответно са *$B(16,0)$* и *$C(7,-8)$*. Напишете уравненията на ъглополовящите на триъгълника.

5. *Задачи за окръжности и комбиниранизадачи.*

А) Задачи за окръжности.

1. **Проверете, че кривите със следните уравнения са окръжности:**
а) *$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$*; б) *$2x^2 + 2y^2 + 5x - 3y - 2 = 0$*;
в) *$x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$*; г) *$x^2 + y^2 + 3y = 0$*.

2. **Напишете уравнението на окръжността:**
а) допираща се до *Ox* в т. *O* и пресичаща *Oy* в т. *$(0,-8)$*;
б) допираща се до *Oy* в т. *O* и пресичаща *Oy* в т. *$(6,0)$*.

3. **Напишете уравненията на окръжностите с радиус *$r = 3$*, допиращи се до *Ox* в т. *$(-5,0)$*.**

4. **Напишете уравнението на окръжността с център т. *$(4,7)$*, допираща се до правата с уравнение *$3x - 4y + 1 = 0$*.**

5. **Напишете уравнението на допирателната през т. *(3,6),* към окръжността с уравнение** $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

6. **Напишете уравненията на допирателните през т. *(-7,1),* към окръжността с уравнение** $x^2 + y^2 = 5$.

7. **Намерете (уравненията на) допирателните към окръжността:**

а) с уравнение $x^2 + y^2 = 13$, **успоредни на правата с уравнение** $4x + 6y - 5 = 0$;

б) с уравнение $x^2 + y^2 + 5x = 0$, **перпендикулярни на правата с уравнение** $4x - 3y + 7 = 0$.

8. **Намерете дължината на допирателна през т. *M(7,8),* към окръжността с уравнение** $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$. ***(Отг.:*** $3.(5)^{1/2}$ ***)***

Б) Комбинирани задачи.

1. Върху отсечката ***AD***, с краища т. ***A(-4, 0)*** и т. ***D(11, 9)***, лежи т. ***C***, деляща отсечката ***AD*** в отношение ***2:1*** – от т. ***A***.

а) Напишете уравнението на правата ***h*** през т. ***C***, перпендикулярна на правата ***c:*** $x + y + 4 = 0$.

б) Намерете координатите на пресечната т. ***B*** на оста ***Oy*** с правата ***c*** и координатите на т.***M*** върху ***AD***, деляща отсечката ***AD*** в отношение ***1:2*** – от т.***A***.

в) Напишете уравнението на медианата m_B през в. ***B*** на ΔABC.

2. ΔABC има върхове съответно т. ***A(-4, 0)***, т. ***B(0, -4)*** и т. ***C(6, 6)***.

а) Намерете средата, т. ***Q***, на отсечката ***AB*** и докажете, че ***CQ*** е перпендикулярна на ***AB***.

б) Напишете уравнението на окръжността, описана около ΔACQ.

в) Напишете уравнението на допирателната през т. ***A*** към окръжността.

$\mathbf{1^0}$. Т. ***M*** лежи върху отсечката ***AD***, с краища т. ***A(0, 4)*** и т. ***D(8, -4)***, и дели тази отсечка в отношение ***1:3*** – от т. ***A***.

а) Напишете уравнението на правата ***m*** през т. ***M***, перпендикулярна на правата ***c:*** $y = 4 - x$.

б) Намерете пресечната т. ***C*** на ***m*** и правата ***a:*** $3x - 5y - 12 = 0$, и пресечната т. ***B*** на правата ***AD*** с ***Ox***.

в) Напишете уравнението на височината през в. ***A*** на ΔABC.

$\mathbf{2^0}$. Дадени са отсечка ***AB:*** т. ***A(0, 4)***, т. ***B(4, 0)*** и ΔQPM с върхове т. ***Q(-4, 2)***, т. ***P(2, -8)*** и т. ***M*** – средата на отс. ***AB***.

а) Докажете, че ***QM*** е перпендикулярна на ***PM.***

б) Напишете уравнението на окръжността, описана около ΔQPM.

в) Напишете уравнението на допирателната през т. ***M*** към окръжността.