ЛИНЕЙНИ ОДУ ОТ ВТОРИ РЕД С ПОСТОЯННИ КОЕФИЦИЕНТИ

Общата форма на тези уравнения е следната:

(1) $$ay'' + by' + cy = f(x),$$

a,b и c са константи (числа), a≠0, $f(x)$ е непрекъсната функция в даден интервал Δ; $y = y(x)$ е неизвестната функция, която се търси като решение на уравнението. Когато дясната част $f(x)$ не е ≡0, уравнението наричаме нехомогенно, а уравнението

(1.0) $$ay'' + by' + cy = 0$$

наричаме хомогенно, съответстващо на нехомогенното (1). Алгебричното уравнение

(*) $$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

наричаме характеристично уравнение за (1.0) и (1). Решенията (корените) на (*) наричаме характеристични корени на (1.0) и на (1), предвид че ако едно реално число λ_0 е корен на (*), то функцията $y = e^{\lambda_0 x}$ е решение на (1.0) – това се установява с непосредствено заместване в (1.0).

Според дискриминантата D=b^2 - 4ac са възможни следните основни случаи:

- реални характеристични корени ($D \geq 0$);
- нереални характеристични корени ($D < 0$).

1. Линейни хомогенни ОДУ от II ред с реални характеристични корени.

Сега $D \geq 0$ и ∃ 2 реални корена λ_1, λ_2 на (*), $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, като всяка от функците $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ е решение на (1.0). По идеята на т.нар. *метод на Лагранж* ще потърсим всички възможни решения на (1.0) като функции от вида $y = u(x)e^{\lambda_1 x}$, където u(x) е нова неизвестна функция (“варирана константа” по Лагранж) вместо y. За да заместим в (1.0) извършваме следните пресмятания (като използваме означението exp(t) вместо e^t):

$$\left.\begin{array}{l} c.\big|\, y = u.\exp(\lambda_1 x) \\ b.\big|\, y' = (\lambda_1 u + u').\exp(\lambda_1 x) \\ a.\big|\, y'' = (\lambda_1^2 u + 2\lambda_1 u' + u'').\exp(\lambda_1 x) \end{array}\right| +$$

$$\Rightarrow ay'' + by' + cy \equiv (a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)u.\exp(\lambda_1 x) + \\ +[au'' + (2a\lambda_1 + b)u'].\exp(\lambda_1 x) = 0$$

т.е. $y = ue^{\lambda_1 x}$ е решение на (1.0) ⇔ u е решение на уравнението $au'' + (2a\lambda_1 + b)u' = 0$, т.е. $u'' + (2\lambda_1 + \frac{b}{a})u' = 0$, т.е. $u'' + (\lambda_1 - \lambda_2)u' = 0$, от известната формула на Виет $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{-b}{a}$. Полагаме (означаваме) $w = u'$ и от (1.1) виждаме, че $w(x)$ е решение на уравнението $w' + (\lambda_1 - \lambda_2)w = 0$.

а) В случай, че D>0: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и от известната формула за решенията на линейно ОДУ от I ред получаваме:

$w = C.e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}$, C – произволна константа; т.е.

$u' = C.e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}$ и следователно

$$u = C.\int e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}dx + C_1 = \frac{C}{\lambda_2 - \lambda_1}e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + C_1 = C_1 + C_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x},$$

където C_1 и C_2 ($C_2 = \frac{C}{\lambda_2 - \lambda_1}$) са независими една от друга константи. С горния израз за $u(x)$ заместваме във връзката $y = ue^{\lambda_1 x}$ и получаваме т.нар. *формула за общото решение* на (1.0) (в случая D>0):

(1.2) $$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

където C_1, C_2 - произволни константи. Двойката решения $\{y_1(x), y_2(x)\} = \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ наричаме *фундаментална система решения* на (1.0), предвид че 2-те функции са "линейно независими" (последното означава, че никоя от функциите не е пропорционална на другата, с коефициент на пропорционалност число).

б) В случая D = 0: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ и за $w = u'$ имаме, че $w' = 0$ (от уравнението $w' + (\lambda_1 - \lambda_2)w = 0$), следователно $w(x) \equiv C_2$, C_2 – константа; т.е. $u' = C_2$, следователно $u = C_2 x + C_1$, C_1 – друга произволна константа. От полученото за $u(x)$ и връзката $y = ue^{\lambda_0 x}$ стигаме до следната формула за общото решение на (1.0) в случая D=0:

(1.3) $$y = C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 x e^{\lambda_0 x}.$$

Сега двойката $\{y_1(x), y_2(x)\} = \{e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}\}$ е *фундаментална система решения.*

2. Линейни хомогенни ОДУ от II ред с нереални характеристични корени (D<0).

а) Частните случаи $y'' + y = 0, y'' + \beta^2 y = 0$:

Очевидно функциите $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$ са решения на $y'' + y = 0$, при това те са фундаментална система решения, откъдето може да се установи, че за съответното общо решение имаме: $y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. От първия частен случай непосредствено следва идеята да проверим, че функциите $y_1 = \cos \beta x, y_2 = \sin \beta x$ са решения на уравнението $y'' + \beta^2 y = 0$ и за общото му решение важи формулата:

(2.1) $$y = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x.$$

б) Общият случай:

Първо за квадратния тричлен $a\lambda^2 + b\lambda + c$ имаме, че:

$$a\lambda^2+b\lambda+c=a(\lambda^2+\frac{b}{a}\lambda+\frac{c}{a})=a[(\lambda+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}]=$$
$$=a[(\lambda+\frac{b}{2a})^2+\frac{|D|}{4a^2}]=a[(\lambda-\alpha)^2+\beta^2],$$

където $\alpha=\frac{-b}{2a},\beta=\frac{\sqrt{|D|}}{2a}$, $(|D|=-D>0)$.

Установихме, че $a\lambda^2+b\lambda+c=a(\lambda^2-2\alpha\lambda+\alpha^2+\beta^2)$, което означава, че диференциалното уравнение (1.0) и уравнението

(2.0) $$y''-2\alpha y'+(\alpha^2+\beta^2)y=0$$

са еквивалентни (т.е. имат едни и същи решения y = y(x)); очевидно характеристичното уравнение за (2.0) е уравнението:

$$\lambda^2-2\alpha\lambda+\alpha^2+\beta^2=0.$$

Следователно остава да решим уравнението (2.0).

Като първа стъпка разглеждаме спомагателното уравнение

(2.0.*) $$y''-2\alpha y'+\alpha^2 y=0$$

(което получаваме от (2.0) при β = 0); това уравнение има двоен характеристичен корен $\lambda_{1,2}=\alpha$ и следователно функцията $y=e^{\alpha x}$ е решение на (2.0.*).

Като втора стъпка, ще потърсим решенията на пълното уравнение (2.0) във вида $y=ue^{\alpha x}$, с “варирана константа” $u=u(x)$ - нова неизвестна функция. За да заместим в (2.0) извършваме пресмятанията:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha^2+\beta^2).\big|y=u.\exp(\alpha x)\\ -2\alpha.\big|y'=(\alpha u+u').\exp(\alpha x)\\ 1.\big|y''=(\alpha^2u+2\alpha u'+u'').\exp(\alpha x)\end{array}\right|+$$
$$\Rightarrow y''-2\alpha y'+(\alpha^2+\beta^2)y\equiv(\alpha^2-2\alpha^2+\alpha^2+\beta^2)u.\exp(\alpha x)+$$
$$+(2\alpha-2\alpha)u'.\exp(\alpha x)+u''.\exp(\alpha x)=0;$$

т.е. (след съкращаване на множителя $e^{\alpha x}$) за u(x) имаме уравнението $u''+\beta^2u=0$, познато от II частен случай, следователно от (2.1) $u=C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x$ и замествайки в $y=ue^{\alpha x}$, получаваме следното за общото решение (в случая D < 0):

(2.2) $$y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Тук двойката $\{y_1(x),y_2(x)\}=\{e^{\alpha x}\cos\beta x,e^{\alpha x}\sin\beta x\}$ е *фундаментална система решения* на (2.0) (и на (1.0)), когато D < 0.

Забележка: Правилото за намиране на числата α,β по очевиден начин имитира формулата за корените от случая D > 0: $\alpha;\beta=\frac{-b}{2a};\frac{\sqrt{|D|}}{2a}$.

3. Линейни нехомогенни ОДУ от II ред - метод на Лагранж.

Сега за нехомогенното уравнение (1) се предполага, че е дадена една фундаментална система решения $\{y_1(x), y_2(x)\}$ на съответното му хомогенно уравнение (1.0). Идеята на Лагранж е да намерим всички решения на (1) във вида:

(3.1) $$Y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x),$$

$u_1(x), u_2(x)$ - двойка неизвестни функции (т.е. $u_1(x), u_2(x)$ са "варирани константи" на мястото на истинските константи C_1, C_2 от формулата $Y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ за общото решение на хомогенното уравнение (1.0)). За да заместим в уравнение (1), първо пресмятаме Y':

$$Y' = u_1y_1' + u_2y_2' + u_1'y_1 + u_2'y_2;$$

по Лагранж въвеждаме допълнителното условие:

(3.2) $$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0,$$

за двете неизвестни функции $u_1(x), u_2(x)$, предвид че досега сме имали само едно условие за тях – самото уравнение (1). От (3.2), при окончателното заместване в (1) с функцията Y от (3.1), имаме следните пресмятания:

$$\begin{aligned}
&c.\,|\, Y = u_1y_1 + u_2y_2 \\
&b.\,|\, Y' = u_1y_1' + u_2y_2' \qquad\qquad \}+ \\
&a.\,|\, Y'' = u_1y_1'' + u_2y_2'' + u_1'y_1' + u_2'y_2' \\
&-------------------- \\
&\Rightarrow aY'' + bY' + cY = a(u_1'y_1' + u_2'y_2') + \\
&(ay_1'' + by_1' + cy_1)u_1 + (ay_2'' + by_2' + cy_2)u_2 \\
&\qquad\qquad = (?)\, f(x);
\end{aligned}$$

но изразите в скобите пред u_1 и u_2 са $\equiv 0$, понеже $y_1(x), y_2(x)$ са решения на хомогенното уравнение (1.0), т.е. за производните на неизвестните $u_1(x)$, $u_2(x)$ остава условието $a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = f(x)$. Последното, заедно с (3.2) дава следната система:

(3.3) $$\left|\begin{aligned} &y_1(x).u_1' + y_2(x).u_2' = 0 \\ &y_1'(x).u_1' + y_2'(x).u_2' = \frac{f(x)}{a} \end{aligned}\right.$$

Това е линейна алгебрична система относно неизвестните величини u_1', u_2', чиято основна детерминанта $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ означаваме по традиция с W(x) – такава детерминанта се нарича *детерминанта на Вронски*; за нея е известно, че $W(x) \neq 0$, $\forall x \in \Delta$, когато $\{ y_1, y_2 \}$е фундаментална система решения на (1.0). С оглед известните формули на Крамер образуваме също двете спомагателни детерминанти:

$$\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ \dfrac{f(x)}{a} & y_2'(x) \end{vmatrix} = \mathrm{d}_1[f], \quad \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & \dfrac{f(x)}{a} \end{vmatrix} = \mathrm{d}_2[f];$$

сега по формулите на Крамер получаваме, че $u_1' = \dfrac{d_1[f](x)}{W(x)}, \quad u_2' = \dfrac{d_2[f](x)}{W(x)}$.

Следователно $u_1 = \int \dfrac{d_1[f](x)}{W(x)} dx + C_1, \quad u_2 = \int \dfrac{d_2[f](x)}{W(x)} dx + C_2,$

където $\int \dfrac{d_1[f](x)}{W(x)} dx = J_1[f](x), \quad \int \dfrac{d_2[f](x)}{W(x)} dx = J_2[f](x)$ са два конкретни неопределени интеграла, например

$$J_1[f](x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d_1[f](t)}{W(t)} dt, \quad J_2[f](x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d_2[f](t)}{W(t)} dt$$

($x_0 \in \Delta$ – произволна фиксирана точка), а C_1 и C_2 са независими помежду си произволни константи. С получените изрази $u_1 = C_1 + J_1[f](x), \quad u_2 = C_2 + J_2[f](x)$ заместваме във връзката (3.1) и установяваме следната формула за общото решение на нехомогенно уравнение (1):

(3.4) $\qquad Y = C_1.y_1(x) + C_2.y_2(x) + J_1[f](x).y_1(x) + J_2[f](x).y_2(x)$.

<u>Коментар:</u>

Понеже $Y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ е общото решение на (1.0), а $J_1[f]y_1 + J_2[f].y_2$ е частно, т.е. конкретно решение на (1) (получено от (3.4) при $C_1 = C_2 = 0$), в (3.4) откриваме следния принцип: общото решение на нехомогенното уравнение е сума от общото решение на хомогенното и частно решение на нехомогенното.