ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА **IV**

ФОРМУЛИ НА КРАМЕР

1. Постановка на проблема.

Дадена е една “квадратна” (от ***n*** уравнения, с ***n*** неизвестни) линейна нехомогенна система,

$$
(1.1)\qquad
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots. \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nk}x_k + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
\qquad .
$$

По горе a_{ij}, $i,j = 1 \div n$, са коефициентите (пред съответните неизвестни) на системата, неизвестните са x_j, $j = 1 \div n$, b_j $(j = 1 \div n)$ са свободните членове (десните части) на системата. За матрицата A (с елементи a_{ij}, $i,j = 1 \div n$) на системата (1.1) ще предполагаме, че има ненулева детерминанта $\Delta = \det(a_{i\,j})$ (т.е. $\Delta \neq 0$).Такава система (матрица или детерминанта) ще наричаме *неособена* или *неизродена*. Чрез т.н. формули на Крамер ще установим, че такава система притежава единствено решение, чиито комнпоненти (координати) $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ се изразяват еднотипно посредством детерминантата Δ и десните части b_j, $j = 1 \div n$. От гледна точка на общата класификация за видовете ситеми, ще можем да заключим, че всяка такава система е *определена*.

2. Извод на формулите на Крамер.

Най-напред ще припомним т.н. *правило на Лаплас* (за развиване на детерминанта по елементите на даден неин ред или стълб). В развитието участват т.н. *адюнгирани количества* $A_{i\,j}$ на елементите $a_{i\,j}$ от даден ред или стълб. Знаем че, по дефиниция, $A_{i\,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i\,j}$, където $\Delta_{i\,j}$ е онази еднозначно определена от елемента $a_{i\,j}$ поддетерминанта, от $(n-1)$-ви ред, на детерминантата Δ, чиято таблична структура получаваме като отстраним (“изрежем” от таблицата на Δ) всички елементи от реда и всички елементи от стълба/колонката на елемента $a_{i\,j}$ (включително и него самия). Двата варианта на правилото на Лаплас, приложени например за развиване по даден (k-ти) стълб, имат съответно вида:

(2.1) $$a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+a_{3k}A_{3k}+\ldots+a_{nk}A_{nk}=\Delta\,;$$

(2.2) $$a_{1k}A_{1m}+a_{2k}A_{2m}+a_{3k}A_{3m}+\ldots+a_{nk}A_{nm}=0 \quad (m\neq k)\,.$$

Преди да преработим системата (1.1) по метода на Крамер, да въведем още n на брой спомагателни детерминанти, $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\ldots,\Delta_n$, построени по един и същи начин чрез основната детерминанта Δ и колонката на свободните членове $b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n$: като заменим k-тия стълб на Δ с колонката на свободните членове, получаваме детерминантата Δ_k ($k=1,2,\ldots,n$). Ако развием тази детермината, съгласно правилото на Лаплас, тъкмо по k-тия й стълб, ще получим очевидно следното равенство

(2.3) $$b_1A_{1k}+b_2A_{2k}+b_3A_{3k}+\ldots+b_nA_{nk}=\Delta_k\,,$$

предвид че елементът на Δ_k с индекси i,k (номер на ред, номер на колонка) е точно числото b_i, а съответстващото му адюнгирано количество е изчислено всъщност само от онези елементи на изходната детерминанта Δ, които дават величината A_{ik} ($i=1,2,\ldots,n$).

Сега да умножим почлено 1-то, 2-то и т.н. n-тото уравнение на системата (1.1) съответно с адюнгираните количества $A_{1k},A_{2k},\ldots,A_{nk}$ (на елементите от k-тата колонка на детерминантата Δ) и да сумираме така умножените уравнения – получаваме:

$$\begin{aligned}&(a_{11}A_{1k}+a_{21}A_{2k}+\ldots+a_{n1}A_{nk})x_1+(a_{12}A_{1k}+a_{22}A_{2k}+\ldots+a_{n2}A_{nk})x_2\\ &+(a_{13}A_{1k}+a_{23}A_{2k}+\ldots+a_{n3}A_{nk})x_3+\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ +\\ &+(a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\ldots+a_{nk}A_{nk})x_k+\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ +\\ &+(a_{1n}A_{1k}+a_{2n}A_{2k}+\ldots+a_{nn}A_{nk})x_n=\ b_1A_{1k}+b_2A_{2k}+\ldots+b_nA_{nk}\end{aligned}\,.$$

В горното равенство единствено сумата в скобите пред неизвестното x_k не е нула – тя е равна на Δ, съгласно (2.1), докато сумите пред всички останали неизвестни са нула, съгласно (2.2); същевременно, от (2.3), сумата в дясната част на горното равенство е равна на Δ_k. С други думи горното равенство всъщност има вида:

(2.4) $$\Delta x_k=\ \Delta_k\,.$$

Но извършвайки описаната процедура за всяко $k=1,2,\ldots,n$, предвид (2.4), получаваме системата

(2.5) $$\Delta x_1=\ \Delta_1,\Delta x_2=\ \Delta_2,\ \ldots\ ,\Delta x_n=\ \Delta_n\,.$$

Системата (2.5) е еквивалентна с (1.1) – понеже е получена от (1.1) чрез операцията "умножаване на уравнение по число и прибавяне към друго уравнение", следователно едната и другата имат едни и същи решения. Очевидно (2.5) се състои от независими едно от друго уравнения (с по едно неизвесно), откъдето за единственото решение на (2.5), а от там и на (1.1), получаваме интересуващите ни формули на Крамер:

(2.6) $$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\,x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots\ ,x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}\,.$$

София, ФМИ/БФ (XII.2007)