Линейни ОДУ от 2-ри ред, с постоянни коефициенти – Задачи (БФ)

(Т. Боев, юни 2009)

<u>*Решете диференциалните уравнения:*</u>

1. $y'' - 2y' + y = (2+x)e^{-x}$.

Решение.

I). Решаваме <u>хомогенното</u> уравнение $y'' - 2y' + y = 0$; за целта използваме т.н. *характеристично уравнение*: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Неговата дискриминанта (пресметната по съкратената формула) очевидно е $d = 1 - 1 = 0$ и имаме двоен характеристичен корен; тогава (съгласно теорията) следната двойка елементарни функции $\{y_1(x) = e^{\lambda_0 x}, y_2(x) = xe^{\lambda_0 x}\}$, където λ_0 е двойният корен, е Ф.С.Р. (фундаментална система решения) – на хомогенното диференциално уравнение; това означава, че всички решения на уравнението $y'' - 2y' + y = 0$ - това са всевъзможните линейни комбинации на двойката $\{y_1(x), y_2(x)\}$, с коефициенти произволни константи C_1, C_2 (описващи независимо една от друга множеството на реалните числа). В нашия случай имаме, че $\lambda_0 = 1$, Ф.С.Р. е $\{e^x, xe^x\}$ и за т.н. *общо решение на хомогенното* (О.Р.Хом.) уравнение – това е фамилията на всички решения – получаваме следния отговор:

$$y^0 = C_1 e^x + C_2 x e^x .$$

II). Търсим частно (т.е. някакво конкретно, измежду много възможни) решение $\eta(x)$ със структурата на *квазиполинома* (от дясната част на нехомогенното уравнение) $(2+x)e^{-x}$, в най-общата възможна форма, т.е. във вида $\eta = (ax+b)e^{-x}$, където a и b са свободни параметри (неопределени коефициенти): замествайки с функцията $\eta = (ax+b)e^{-x}$ в уравнението $y'' - 2y' + y = (2+x)e^{-x}$ (като поставим на местата на y, y', y'', съответните изрази за η, η', η''), предстои да определим a и b така, че функцията $\eta(x)$ да е решение на това уравнение. За тази цел пресмятаме производните $\eta'(x)$, $\eta''(x)$ на функцията $\eta = (ax+b)e^{-x}$; получаваме: $\eta' = (-ax + a - b)e^{-x}$, $\eta'' = (ax + b - 2a)e^{-x}$. За да заместим в уравнението $y'' - 2y' + y = (2+x)e^{-x}$ с функцията $\eta(x)$ ($\eta(x) \equiv (ax+b)e^{-x}$), очевидно имаме да умножим последователно $\eta(x)$, $\eta'(x)$, $\eta''(x)$ съответно с коефициентите $1, -2, 1$ (стоящи пред y, y', y'') от лявата част на уравнението. За удобство да означим с $P[\eta](x)$ израза $\eta''(x) - 2\eta'(x) + \eta(x)$ (в такива случаи казваме, че сме приложили диференциалния оператор $P[y]$ - от лявата част на диференциалното уравнение – към функцията $y = \eta(x)$). Пресмятанията ще подредим по следния начин:

$$
\begin{array}{rrl}
 & 1.| & \eta = (ax+b)e^{-x} \\
+\{ & -2.| & \eta' = (-ax+a-b)e^{-x} \\
 & 1.| & \eta'' = (ax+b-2a)e^{-x} \\
\hline
 & & \Rightarrow P[\eta](x) \equiv (4ax+3b-4a)e^{-x} \stackrel{?}{=} (2+x)e^{-x} .
\end{array}
$$

Второто равенство (с въпросителния знак) означава, че имаме да определяме неизвестните коефициенти a, b така, че равенството да е изпълнено като тъждество относно x (т.е. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$). В такива случаи, след „автоматично” съкращаване на величината e^{-x} (която не се анулира за никое x), остава да приложим известния *принцип за сравняване на коефициентите* , който гласи, че два полинома (изобщо от различни степени) са идентични, точно когато са равни коефициентите им пред съответните степени на x: в нашия случай имаме да сравняваме два полинома от 1-ва степен (т.е. линейни функции) – получаваме елементарната система $\{4a = 1; 3b - 4a = 2\}$, с решение $a = \dfrac{1}{4}, b = 1$. Така получихме, че нехомогенното О.Д.У. притежава частно решение в търсената елементарна форма и то е $\eta = \left(\dfrac{x}{4} + 1\right)e^{-x}$.

III). Общо решение на нехомогенното (О.Р.Нех.) уравнение.

От принципа на Лагранж – „О.Р.Нех. = О.Р.Хом. + Ч.Р.Нех.” – за окончателното решение на задачата получаваме следния

Отговор: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \left(\dfrac{x}{4} + 1\right)e^{-x}$. (Забележка: „Ч.Р.Нех.” означава „частно решение на нехомогенното уравнение”.)

2. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$.

Решение (препоръчва се за самостоятелна работа).

Упътване: за корените на характеристичното уравнение по познатия начин се получава $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$, което (съгласно теорията) означава, че двойката елементарни функции $\{e^x, e^{4x}\}$ е Ф.С.Р. на хомогенното (линейно) О.Д.У. , значи $y^0 = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$ е О.Р.Хом.; за нехомогенното уравнение трябва да се търси частно решение (с неопределени коефициенти) от вида $\eta = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ (понеже в дясната част на уравнението имаме квадратичният *квазиполином* $4x^2 e^{2x}$). Заествайки в нехомогенното О.Д.У. с функцията $\eta = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$, чрез илюстрирания по-горе принцип за сравняване на коефициентите се очаква да получим $\eta = (-2x^2 + 2x - 3)e^{2x}$. (Преди това трябва да сме пресметнали производните: $\eta' = [2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c]e^{2x}$ и $\eta'' = [4ax^2 + (8a + 4b)x + 2a + 4b + 4c]e^{2x}$.) *Отговор:* $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x} + (-2x^2 + 2x - 3)e^{2x}$.

3. $y'' - 4y' + 13y = 8\sin 5x$.

Решение.

I). За да решим хомогенното О.Д.У., започваме с характеристичното уравнение: $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$; неговата дискриминанта (по „съкратената” формула) е $d = 4 - 13 = -9$ (отрицателна), следователно - съгласно теорията - хомогенното О.Д.У. ще има Ф.С.Р., от елементарни функции, от вида $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$. Двойката числа $\{\alpha; \beta\}$ намираме по схема, имитираща формулата за корените на квадратното уравнение $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$, като вместо $\dfrac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}$ записваме символа $\dfrac{-B; \sqrt{|D|}}{2A}$; схемата действува така: $\dfrac{-B; \sqrt{|D|}}{2A} \Rightarrow \{\dfrac{-B}{2A}; \dfrac{\sqrt{|D|}}{2A}\}$, т.е. $\alpha = \dfrac{-B}{2A}, \beta = \dfrac{\sqrt{|D|}}{2A}$. Когато $B = 2K$

(както е в уравнението $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$), работим по „съкратената” формула $\{\alpha;\beta\} = \{\frac{-K}{A}; \frac{\sqrt{|d|}}{A}\}$; това в нашия случай (за хомогенното О.Д.У. $y'' - 4y' + 13y = 0$) дава $\{\alpha;\beta\} = \{2;3\}$, значи двойката функции $\{e^{2x}\cos 3x, e^{2x}\sin 3x\}$ е търсената Ф.С.Р. Тогава $y^0 = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$ е О.Р.Хом.

II). Частно решение на нехомогенното О.Д.У. (със структурата на дясната част). Когато дясната част е „синус” или „косинус”, умножен по константа, или сума на два такива едночлена (но от един и същи аргумент), търсим Ч.Р.Нех. във вида $\eta = a\cos(..) + b\sin(..)$, в нашия случай: $\eta = a\cos 5x + b\sin 5x$, с неопределени коефициенти a, b. /<u>*Забележка:*</u> Ако в дясната част на О.Д.У. имаме „полином” по „синус” (или „косинус”), работим аналогично – търсим частно решение във вида „полином, с неопределени коефициенти” по „синус”/„косинус” , като търсеният полином има степента на дадения./ За да заместим в нехомогенното О.Д.У., необходимите пресмятания правим по вече известната схема:

$$\begin{array}{rrl} & 13.| & \eta = a\cos 5x + b\sin 5x\,; \\ +\{ & -4.| & \eta' = 5b\cos 5x - 5a\sin 5x\,; \\ & 1.| & \eta'' = -25a\cos 5x - 25b\sin 5x\,; \end{array}$$

$$\Rightarrow P[\eta](x) \equiv -(12a + 20b)\cos 5x + (20a - 12b)\sin 5x \stackrel{?}{=} 0.\cos 5x + 8.\sin 5x\,.$$

Сега като приравним коефициентите пред „косинус” и „синус” - от двете страни на равенството с въпросителния знак, получаваме:

$$\{12a + 20b = 0;\, 20a - 12b = 8\}, \Rightarrow a = \frac{5}{17}, b = \frac{-3}{17}\,.$$

Така намерихме, че $\eta = \frac{5}{17}\cos 5x - \frac{3}{17}\sin 5x$.

III). Общо решение на нехомогенното О.Д.У.

<u>*Отговор:*</u> $y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + \frac{1}{17}(5\cos 5x - 3\sin 5x)$.

/ Т. Боев, БФ, 10.06.2009 г./