Б Е З К Р А Й Н И Ч И С Л О В И Р Е Д О В Е

1) Дефиниции и примери.

Израз от вида $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$, където a_1, $a_2, ...$, $a_n, ...$ са реални числа, наричаме *безкраен числов ред.* За краткост използваме също означението $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Числата a_1, $a_2, ...$ наричаме *членове на реда* (съответно първи, втори и т.н.), числото a_n наричаме *общ член* на реда.

Крайната сума $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ наричаме *n-та частична* (или *парциална*) сума на реда.

Сходящ ред: Ако редицата $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща, казваме, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ е сходящ и границата s на редицата $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(s = \lim_{n\to\infty} s_n)$ наричаме *сума* на реда като използваме означението: $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Редовете, които не са сходящи, наричаме разходящи.

Примери:

(1) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$.

Тъй като $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, то $s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - ... - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$; очевидно $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$, т.е. редът е сходящ и s = 1 $= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ...$.

(2) 1+1+1+… .

Този ред е разходящ, понеже $s_n = n \to \infty$.

(3) $1 - 1 + 1 - 1 + ...$.

Отново имаме разходящ ред, понеже редицата $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ сега се състои от двете подредици: 0, 0, 0,... и 1, 1, 1,..., с очевидно различни граници, което означава, че $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ не е сходяща редица.

(4) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$.

В този случай, както знаем от свойствата на числото *e*, имаме сходящ ред и $s = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$.

(5) *Геометрична прогресия***.**

Крайна прогресия: $a_1 + a_2 + ... + a_n$, където $a_{k+1} = qa_k, \forall k = 1, 2, ..., n-1$; числото q

наричаме *частно* на прогресията. За сумата s_n лесно получаваме, че $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1(1+q+q^2+...+q^{n-1})$. Ако умножим сумата $1+q+q^2+...+q^{n-1}$ с $1-q$ непосредствено получаваме, че $(1-q)(1+q+q^2+...+q^{n-1}) = 1-q^n$. Следователно в сила е формулата:

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, (q \neq 1) \qquad .$$

Безкрайна прогресия: $a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^n + ...$. При $|q| \geq 1$ редът е разходящ, защото тогава общият член a_n не клони към нула. Както ще видим по-долу, условието $a_n \to 0 (n \to \infty)$ е необходимо за сходимост на даден ред. При $|q| < 1$ редът е сходящ: $s_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q}q^n \to \frac{a_1}{1-q}(n \to \infty)$, понеже, както е известно, $q^n \to 0 (n \to \infty)$ при $|q| < 1$; получихме следната формула за сума на безкрайна геометрична прогресия:

$$s = \frac{a_1}{1-q} \qquad .$$

2) Необходимо условие за сходимост.

В сила е следното

Твърдение. За да е сходящ даден ред, необходимо е $a_n \to 0 (n \to \infty)$, т.е. ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ ред, то $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Доказателство: Понеже $\lim_{n \to \infty} s_n = s$, то същото важи и за редицата $\{s_{n-1}\}$, откъдето непосредствено получаваме, че $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$.

Пример: $1+2+3+...$ е разходящ ред, защото $a_n = n (n \to \infty)$ не клони към нула.

Недостатъчност на необходимото условие – *хармоничен ред*:

Редът $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$ се нарича *хармоничен.* Макар че за него е в сила необходимото условие $a_n = \frac{1}{n} \to 0 (n \to \infty)$, ще се убедим, че редът не е сходящ, т.е. условието не е достатъчно за сходимост. Наистина, ако допуснем, че редът е сходящ, то редиците $\{s_n\}$ и $\{s_{2n}\}$ ще имат една и съща граница и следователно $s_{2n} - s_n \to 0 (n \to \infty)$. Но $s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$, което противоречи на горното. Противоречието се дължи на допускането за сходимост, следователно редът е разходящ.

3) Някои основни свойства на редовете.

а) *Операции със сходящи редове:*

Ако $s=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ са два сходящи реда и α,β са произволни числа, то и редът $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$ е сходящ и е в сила правилото : $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha s+\beta\sigma$. Това означава, че множеството на сходящите редове представлява *линейно пространство.* В частност имаме правило за почленно събиране и изваждане на сходящи редове, а също - *дистрибутивен закон:* произведение на число с безкрайна сума пресмятаме като разкрием скобите. (Доказателството на горното правило е непосредствено следствие от дефиницията на сходящ ред и правилата за работа с редици.)

б) Редове с неотрицателни членове - принцип за сравняване.

В сила е следното

Свойство. Ако $0\le a_n\le b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n<\infty$ (т.е редът е сходящ), то и редът $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ е сходящ. В подобни случаи редът $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ се нарича *мажоранта* или мажорантен ред за $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, а редът $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ – *миноранта* за $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

Доказателство на свойството: От неравенството между общите членове веднага следва, че е в сила и неравенството $s_n\le\sigma_0$, където σ_0 е сумата на $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, а s_n - парциалната сума на $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.Но редицата $\{s_n\}$ е очевидно монотонно растяща, а от горнтото неравенство виждаме, че е и ограничена отгоре, и, според свойствата на безкрайните редици, е сходяща, което означава, че редът $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ е сходящ.

в) Пример: Редът $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$ се мажорира от реда $1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n.(n+1)}+...$ и следователно е сходящ, като сумата му не е по-голяма от 2.

4. Признаци (критерии) за сходимост на редовете.

а)Редове с положителни членове:

Критерий на Даламбер. Редът $\sum_{n=1}^{\infty}a_n, a_n>0$ е сходящ, ако за всички достатъчно големи стойности на номера *n* е в сила неравенството $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le q$, за някое число $q<1$. Редът е разходящ, ако за всички достатъчно големи *n* е изпълнено неравенството $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.

Доказателство: Нека неравенството $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ е в сила за всички $n \geq N$. Тогава $a_{N+1} \leq qa_N, a_{N+2} \leq q^2 a_N, \ldots$ и редът $a_1 + a_2 + \ldots + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots$ се мажорира от следния ред: $a_1 + a_2 + \ldots + a_N + qa_N + q^2 a_N + q^3 . a_N + \ldots$; той се състои от крайната сума $\sum_{k=1}^{N-1} a_k$ и безкрайната геометрична прогресия $a_N(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots)$, която е сходяща. Следователно от принципа за сравняване и редът $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ е сходящ. Когато $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ за всички $n \geq N$, то очевидно имаме $a_n \geq a_N > 0$ за всички такива *n,* т.е. a_n не клони към 0 при $n \to \infty$. Според необходимото условие последното означава, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ е разходящ.

За практически цели се използва следният по-ограничен, но по-удобен *граничен вариант* (на критерия). Ако съществува $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то редът е сходящ при $l < 1$ и разходящ при $l > 1$. Случаят, когато $l = 1$ и неравенството $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ не е в сила за всички достатъчно големи *n,* представлява изобщо открит въпрос.

б) Пример: Нека *x* е произволно положително число. Да разгледаме реда $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$. Този ред е сходящ по критерия на Даламбер: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = x \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

в) Редове с алтернативно сменящи се знаци на членовете: Тук ще формулираме без доказателство следния полезен и удобен

Критерий на Лайбниц: Ако редицата $\{a_n\}$ $(a_n \geq 0)$ е монотонно намаляваща и клони към нула, т.е. $a_{n+1} \leq a_n$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ е сходящ.