Б Е З К Р А Й Н И Ч И С Л О В И Р Е Д И Ц И

1). Уводни бележки.

Понятието “безкрайна редица” е добре познато от училищния курс по математика (вж. напр.[П.П.]). По същество едно множество от реални числа представлява “безкрайна числова редица” ако се състои от безкрайно много елементи, които са номерирани. Последното означава, че на всяко естествено (т.е. цяло положително) число е съпоставен по един елемент от множеството. С други думи, в рамките на училищните ни представи за функция, елементите на една безкрайна числова редица можем да разглеждаме като стойности $a_n = f(n)$ на функция *f,* чиито аргумент описва само множеството на естествените числа. Добре известна е следната (вж. напр.[Я.Т.])

<u>Дефиниция.</u> Казваме, че е дадена една безкрайна числова редица

(1) $$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \quad ,$$

ако на всяко естествено число n е съпоставено по едно число a_n. Числата $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ наричаме съответно първи, втори, трети,..., n-ти член на редицата, числото n - номер на члена a_n. Числото a_n наричаме също общ член на редицата. За дадена редица с общ член a_n използваме, освен обозначението (1), също и кратките означения $\{a_n\}_1^\infty$ или $\{a_n\}$.

Примери:

1) Редицата с общ член 1 / n, т.е.

(2) 1, 1/2 , 1/3, …, 1/n, … .

2) Редицата с общ член $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, т.е.

(3) $$1, -1/2, \ 1/3, \ ... \ , \frac{(-1)^{n-1}}{n}, ...$$

В пример (1) на естественото число n е съпоставено числото $1/n$, а в пример (2) - числото $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

а) Сходящи редици.

Най-напред ще се спрем на понятието околност на число (точка) върху реалната ос.

<u>Дефиниция</u>. За дадено реално число a, всеки отворен интервал (α, β) който съдържа a, е негова околност.

Да припомним, че отворен интервал (α, β), това е множеството от реалните числа x: $\alpha < x < \beta$.

Симетрична околност. Една околност на дадена т. a наричаме нейна симетрична околност, когато т. a е в средата на околността. Ако (α, β), е такава (крайна) околност, половината от дължината на интервала, т.е. числото $1/2(\beta-\alpha)$, наричаме радиус на околността, а т. a – неин център. Ясно е, че една симетрична околност се определя еднозначно по даден център (т.a) и даден радаус $r > 0$; тя е отвореният интервал $(a - r,\ a + r)$ и се състои от реалните числа x, за които

(4) $$a - r < x < a + r,$$

т.е.

(5) $$|x - a| < r.$$

Геометрически, представянето (5) означава, че околността се състои от точките x, които са "r – близки" (т.е. са на разстояние по-малко от r) до т. a.

Нататък ще работим със симетрични околности, което няма да води до ограниченичаване на общността на съответните разсъждения. Освен това, когато преимуществено се имат предвид малки радиуси, ще използваме гръцката буква ε (вместо r).

В множеството на всевъзможните безкрайни редици централна роля играе фамилията на онези, при които се наблюдава нарастващо (с нарастването на номера n) "сгъстяване" на членовете на редицата около фиксирана точка (характерна за съответната редица). Така описаната картина, формализираме в следната

Дефиниция (Сходяща редица). Една безкрайна редица $\{a_n\}$ наричаме сходяща, ако за нея съществува число a със следните свойства: $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ ест. число $N = N(\varepsilon)$, т.е. N зависи от ε, такова че: $|a_n - a| < \varepsilon,\ \forall n > N$. Числото a наричаме границa на редицата и използваме следните еквивалентни означения:

$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ("$a =$ лимес от a_n, при n, клонящо към безкрайност"), или

$a_n \to a,\ n \to \infty$ ("a_n клони към a, при n клонящо към безкрайност").

От дефиницията е ясно, че ако $\{a_n\}$ е сходяща редица, с граница a, вън от всяка ε - околност (т.е. околност с радиус ε) на т. a остават само краен брой (евентуално 0) членове на редицата, защото всички членове с достатъчно големи номера (в такъв сл. казваме също "почти всички") са вътре в околността. "Членове с достатъчна големи номера" означава такива, чиито номер n е по-голям от едно, съответстващо на радиуса ε, естествено число N. (Вж. рис.1 по-долу.)

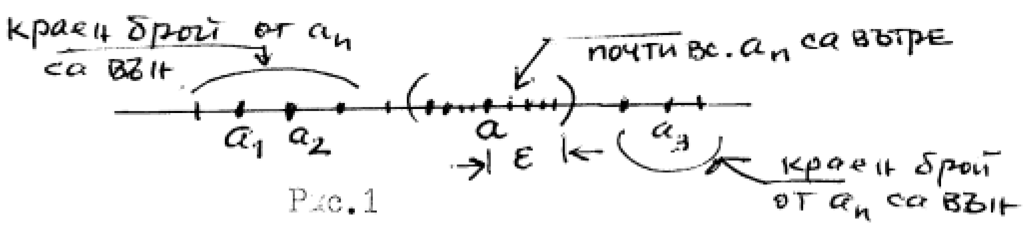

Рис.1

Сега дефиницията (наричана още ε-дефиниция) за сходяща редица можем да формулираме и по-кратко, така: една редица наричаме сходяща, ако съществува такава число *a,* че всяка негова ε-околност съдържа почти всички членове на редицата; такова число наричаме граница на редицата.

От дефиницията се вижда още, че границата на сходяца редица е единствена: ако т. *a* е граница, никое друго число *b* не може също да е граница, понеже, ограждайки т. *a* с такава ε-околност, че т. *b* да остане вън от нея, имаме, че почти всички членове на редицата са в тази околност и около т. *b* не може да има същия тип "сгъстяване".

Друг характерен белег на сходящите редици е, че те са ограничени. Да припомним основното около понятието ограничено множество.

Дефиниция. Едно множество M от реални числа наричаме ограничено отдолу, ако съществува константа (число) C_1, т. че $\forall x \in M$ (т.е. x от M) е изпълнено неравенството: $C_1 \leq x$. Аналогично, едно множество M наричаме ограничено отгоре, ако съществува константа C_2, такава че, $x \leq C_2$, $\forall x \in M$. Едно множество M наричаме ограничено, ако е ограничено и отдолу, и отгоре (за такова множество съществуват 2-ка константи C_1, C_2, така че $C_1 \leq x \leq C_2$, $\forall x \in M$).

Едно множество M е ограничено тогава и само тогава, когато за някое число C имаме: $|x| \leq C$, $\forall x \in M$. Наистина, ако $|x| \leq C$, то $-C \leq x \leq C$ и следователно M е ограничеио; обратно, ако M е ограничено, в сила са неравенствата $C_1 \leq x \leq C_2$, $x \in M$, за някакви константи C_1, C_2, откъдето при C = мах{|C1| , |C2|} (т.е. по-голямото от $|C_1|$, $|C_2|$), очевидно следва: $|x| \leq C$.

Да се върнем на твърдението, че ако $\{a_n\}$ е сходяща редица, тя е ограничена, т.е. множеството M $= \{a_n\}$ (с елементи $x = a_n$ - членовете на редицата) е ограничено. Това е така, понеже около т. *a*, $a = \lim\limits_{x\to\infty} a_n$ имаме "нарастващо сгъстяваие" и всеки достатъчно широк интервал (C_1, C_2) ще съдържа всички т. x = a_n (n = 1, 2,...). Една конкретна конструкция на такъв интервал можем да си представим така: фиксираме една ε-околност на т. *a*, напр. с радиус ε = 1, тогава вън от нея остават най- много краен брой членове a_n и измежду тях има най-малък, a_* и най-голям, a^* ($a_* = a_k$, за някое ест. число k и $a^* = a_l$, за някое друго ест. число *l*); сега да вземем $C_1 = \min\{a_*, a-1\}$ (т.е. по-малкото от a_* и $a-1$) и $C_2 = \max\{a^*, a+1\}$ (т.е. по-голямото от a^* и $a+1$), с което интервалът е конструиран (направете чертеж !).

Ако една безкрайна редица е неограничена (т.е. не е ограничена), тя е разходяща (т.е не е сходяща): очевидно, понеже ако предположим, че редицата е сходяща, тогава тя би била ограничена.

б) Граници “безкрайност”.

Като азбучни случаи на неограничени редици, можем да използваме следните три примера:

(6) 1, 2, 3, . •. , n,.... (a_n = n),

т.е. редицата на естествените числа;

(7) -1, -2, -3, ... , -n,… (a_n = -n),

т.е. редицата на целите отрицателни числа;

(8) 1, -2, 3,-4, , $(-1)^{n-1}$n,... ($a_n = (-1)^{n-1}.n$),

редица от цели числа, с алтернативно сменящи се знаци.

Всяка от горните редици е разходяща (понеже не е ограничена), но в поведението на първите две имаме "строга ориентация на отдалечаване”, с нарастването на номера n. Такова поведение ще позволява да считаме, че съответната редица има граница +∞ (вж. редица (6)) или -∞ (редица (7)). Както ще се убедим от следващата дефиниция, в (8) имаме пример на разходяща редица (нямаща "крайна" граница), която освен това няма нито граница +∞, нито граница -∞.

Дефиниция (Граница безкрайност). Казваме, че една редица $\{a_n\}$ клони (или дивергира) към +∞, при n $\to$ ∞, ако ∀r съществува естествено число N, N = N(r), такова че a_n > r , ∀n > N. Аналогично, $\{a_n\}$ клони (дивергира) към -∞, при n $\to$ ∞, ако ∀r съществува естествено число N, N = N(r), такова че a_n < r, ∀n > N. В първия случай пишем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ или a_n → ∞, n → ∞, а във втория: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ или a_n → -∞, n → ∞.

Коментар: Аналогията със случая на "крайна” граница (т. *а*) при сходяща редица, е очевидна. Наистина, сега интервалите от вида r < x, т.е. (r, +∞) играят ролята на околности на “+ безкрайността", а интервалите x < r, т.е. (-∞, r) – на “- безкрайността”. При това, имаме граница + ∞ (съответно - ∞), когато всяка околност на + ∞ (съответно - ∞) съдържа почти всички членове на редицата, (Вж. рис. 2)

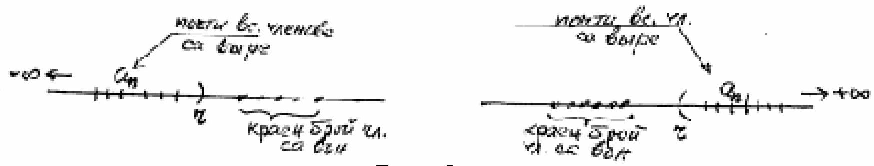

Рис. 2

2). Свойства на сходящите редици.

а) Правила за смятане (или действия) със сходящи редици.

Тук имаме предвид една основна четворка свойства, които, накратко формулирани, са: - правило за умножение на число с редица; -правило за сума на две редици; -правила за (почленно) умножение и деление на редици. По същество те се съдържат в следното

<u>Твърдение 1.</u>

1) Ако $\{a_n\}$ е сходяща редица, с граница a и λ е произволно число, то и редицата $\{\lambda a_n\}$ е сходяща, и $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda a$ (т.е. $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n$).

Ако $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ са сходящи редици, съответно с граници a и b, то:

2) Редицата с общ член $c_n = a_n + b_n$ е също сходяща, и $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ (т.е. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$).

3) Същото важи и за редицата с общ член $p_n = a_n \,.\, b_n$, като $\lim_{n\to\infty} p_n = a.b$ (т.е. $\lim_{n\to\infty}(a_n.b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n$).

4) Когато $b_n \neq 0$, $\forall n$. и $b \neq 0$, сходяща е и редицата с общ член $q_n = a_n / b_n$, като $\lim_{n\to\infty} q_n = a/b$ (т. е. $\lim_{n\to\infty}(a_n / b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n$).

За да докажем например св-во 1), да образуваме разликата $\lambda a_n - \lambda a$; понеже $\lambda a_n - \lambda a = \lambda(a_n - a)$ и $a_n - a$ клони към 0, при $n \to \infty$ (от предположението, че a е границата на $\{a_n\}$), то $|\lambda|.|a_n - a| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, за всички достатъчно големи n , т.е., $\forall \varepsilon > 0$, $|\lambda a_n - \lambda a| < \varepsilon$, за почти всички членове λa_n; по дефининицията по-горе, това означава, че $\{\lambda a_n\}$ е сходяща редица и λa е границата й. Да отбележим че в приложените разсъждения използвахме очевидното твърдение, че редицата $\{a_n\}$ е сходяща и клони към a (при $n \to \infty$), тогава и само тогава, когато редицата $\{a_n - a\}$ е сходяща и клони към 0 (при $n \to \infty$).

Доказателството на с-во 2) оставяме за самостоятелно упражнение на читателя; то може да бъде открито и в училищните учебници по математика (вж. напр. [П.П]).

За доказателството на св-ва 3) и 4), преработваме разликите $a_n.b_n - ab$ и $\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}$ по следния начин:

$$a_n b_n - ab = a_n b_n - ab_n + ab_n - ab = (a_n - a)b_n + a(b_n - b);$$

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bb_n}(a_n b - ab_n) = \frac{1}{bb_n}(a_n b - ab + ab - ab_n) =$$

$$= \frac{1}{b_n}(a_n - a) + \frac{a}{bb_n}(b_n - b).$$

Следователно, от неравенството иа триъгълника $|A + B| \leq |A| + |B|$, A и B числа :

(9) $$|a_n b_n - ab| \leq |a_n - a|.|b_n| + |b_n - b|.|a|;$$

(10) $$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right| \le \frac{1}{|b_n|}|a_n-a|+\frac{1}{|bb_n|}|b_n-b|.$$

Понеже $b_n \to b$ $(n \to \infty)$, то $|b_n - b| < |b|/2$ за почти всички n и (от еквивалентната форма $|A| - |B| \le |A - B|$ на неравенството на триьтълника) имаме:

$$|b_n|-|b| \le |b_n-b| \le \frac{|b|}{2} \quad \text{и}$$

$$|b|-|b_n| \le |b_n-b| \le \frac{|b|}{2} \quad \text{, следователно}$$

(11) $$\frac{|b|}{2} \le |b_n| \le 3|b_n|/2,$$

за почти всички n. От дясната част на (11), заместена в в дясната част на (9), получаваме, че:

(12) $$|a_nb_n-ab| \le |a_n-a|\frac{3|b|}{2} + |b_n-b|.|a|.$$

От лявата страна на (11) следва, че $\frac{1}{|b_n|} \le \frac{2}{|b|}$, откъдето, след заместване в дясната част на (10), установяваме:

(13) $$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right| \le |a_n-a|.\frac{2}{|b|} + |b_n-b|.\frac{2}{b^2}.$$

Понеже десните части на (12) и (13) клонят към 0, при $n \to \infty$, тъй като $a_n - a$ и $b_n - b$ имат това поведение по условие, то

$$|a_nb_n-ab|<\varepsilon \text{ и } \left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right|<\varepsilon,$$

за всяко $\varepsilon > 0$, за почти всички n, с което доказателството на свойства 3) и 4) е завършено.

Коментар: Свойства 1) и 2) означават, че множеството на сходящите редици е “линейно пространство”, с характерните две операции "умножение на елемент от множеството с число" и "сума на елементи от множеството", като "неутралният" елемент (относно операцията "сума") е нулевата редица

0, 0, 0,......, 0,......

Забележка: Свойство 4) остава в сила и при по-общото предположение, че $b_n \ne 0$ от някое n нататък.

Едно допълнително свойство.

Ако $\{a_n\}$ е сходяща редица с граница a и съществува $\sqrt[k]{a_n}$ (k – ти корен от a_n, k – естествено число) от някое n нататък, то и редицата $\{(\sqrt[k]{a_n})^m\}$ е сходяща, $\forall$ естествено m, като $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{m/k} = a^{m/k}$ (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{m/k} = (\lim\limits_{n\to\infty} a)^{m/k}$), където $b^{m/k} = (\sqrt[k]{b})^m$, когато $\sqrt[k]{b}$ съществува (за дадено число b).

За доказателството най-напред ще уточним, допускайки известена нестрогост, че под $\sqrt[k]{b}$ разбираме съответно такова >0 число, когато $b > 0$, <0 число, когато $b < 0$ и k е нечетно (и 0, когато b = 0), което е решение на уравнението $x^k = b$. Да означим с α_n числото $\sqrt[k]{a_n}$; получената безкрайна редица $\{\alpha_n\}$ е ограничена, иначе сходящата редица $\{a_n\}$ няма да е ограничена (което е невъзможно). Тогава съществува число α (както ще се убедим по-долу), във всяка околност на което има елементи α_n. Подреждайки тези елементи в отделна редица, имаме "подредица" (вж. по-долу относно това понятие), която е сходяща и клони към α; следователно, по св-во 3), редицата от k-тите степени, които са числа от вида α_n^k, клони към α^k. Но $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n^k = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, откъдето следава, че $\alpha^k = a$, т.е. съществува $\sqrt[k]{a} = \alpha$. Освен това, вън от всяка околност на α не може да има повече от краен брой членове α_n, иначе по описания вече начин бихме намерили още едно число β = $\sqrt[k]{a}$. Но от $\alpha^k = \beta^k = a$, не е трудно да заключим, че α = β. Така констатираме, че всъщност редицата $\{\alpha_n\}$ е сходяща, с граница α, което е (единственият) k-ти корен от a. Сега е ясно, пак по св-во 3), че и редицата $\{(a_n)^{m/k}\}$ е сходяща и има граница $a^{m/k}$.

<u>Сходимост по модул.</u>

Тук имаме предвид следното свойство на сходящите редици:

<u>Твърдение 2.</u>

Ако редицата $\{a_n\}$ е сходяща, с граница a, то и редицата $\{a_n\}$ е сходяща и $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$.

Доказателството е елементарно следствие от неравенството на триъгълника: понеже $|a_n - a| < \varepsilon$, $\forall\varepsilon > 0$, за почти всички n и $||a_n| - |a|| \le |a_n - a|$, то и $||a_n| - |a|| < \varepsilon$, $\forall\varepsilon > 0$, за почти всяко n.

б) Граници нула и безкрайност.

Разглеждайки двойки редици от вида $\{a_n\}, \{1/a_n\}$, забелязваме, че между границите нула и безкрайност съществува проста връзка.

<u>Твърдение 3</u>

Една редица $\{a_n\}$ с положителни членове е сходяща и клони към *0* (при $n \to \infty$) тогава и само тогава, когато редицата $\{1/a_n\}$ дивергира към +∞.

Доказателство. Ако $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то $a_n < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0,$ за почти всички n и тогава $1/a_n > r,$ за всяко реално число r, за почти всички $n;$ наистина, за $r < 0$ нервенството $1/a_n > r$ е валидно за всяко n, понеже $a_n > 0$, а за произволно $r > 0$, от $a_n < \varepsilon,$ при $\varepsilon = 1/r,$ т.е. $a_n < 1/r$ (за почти всички n), очевидно следва желаното $1/a_n > r$, следователно $1/a_n \to +\infty, n \to \infty$. Обратно, ако $\lim_{n\to\infty} 1/a_n = +\infty$, имаме, че $1/a_n > r, \forall r > 0,$ за почти всички n, откъдето $\forall \varepsilon > 0,$ понеже $1/a_n > 1/\varepsilon$ (при $r = 1/\varepsilon$), получаваме: $a_n < \varepsilon,$ т.е. $|a_n - 0| < \varepsilon,$ за почти всички n, следователно $\{a_n\}$ е сходяща редица и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Забележки: 1. Твърдението "Една редица $\{a_n\}$ с положителни членове дивергира към $+\propto$, при $n \to \propto$, <=> редицата $\{1/a_n\}$ е сходяща и клони към 0 (при $n \to \propto$) " очевидно е еквивалентно с горното, понеже за редицата с общ член $b_n = 1/a_n$ е в сила вече доказаното.

2. Твърдение 3 важи и при по-общото предположение, че $a_n > 0$ от някое n нататък. Същото се отнася и за твърдението от забележка 1.

(Знакът <=> е равносилен на думите "тогава и само тогава, когато".)

Следващите твърдения са елементарни вариации върху темата от Твърдение 3:

А) Една редица $\{a_n\}$ с отрицателни (от някое n нататък) членове е сходяща и клони към 0 (при $n \to \propto$) <=> редицата $\{1/a_n\}$ дивергира към $-\propto$. (Това е така, понеже за редицата с общ член $b_n = -a_n$ е в сила Твърдение 3.)

Б) Една редица $\{a_n\}$ е сходяща и клони към 0 (при $n \to \propto$) <=> редицата $\{1/|a_n|\}$ дивергира към $+\propto$.

В) Една редица $\{a_n\}$ е неограничена и $|a_n| \to +\infty$ (при $n \to \propto$) <=> редицата $\{1/a_n\}$ (от някое n нататък) е сходяща и $\lim_{n\to\infty} 1/a_n = 0$.

(Доказателствата на Б) и В) оставяме на читателя.)

в) Граници на редицата $\{q^n\}$.

Редицата с общ член $a_n = q^n$, където $q \neq 0$ е произволно реално число, има характерно гранично поведение при $q \neq 1$. Тази специфика ще изясним в следното

Твърдение 4.

1) При $|q| < 1$ редицата $\{q^n\}$ е сходяща и $\lim q^n$ $(n \to \infty) = 0;$

2) При $|q| > 1$ редицата $\{|q^n|\}$ дивергира към $+\infty$ $(n \to \infty)$, при което $\lim q^n = +\infty$ $(n \to \infty)$, когато $q > 1$; когато $q < -1$, редицата $\{q^n\}$ е разходяща, неограничена и не дивергира нито към $+\infty$, нито към $-\infty$;

3) При $q = 1$, $q^n = 1$, за вс. n и $\lim q^n = 1$ $(n \to \infty)$, а при $q = -1$, редицата $\{q^n\}$ е ограничена и разходяща.

Доказателство. Първо, за твърдението от т. 2) ще използваме известното разлагане

$$|q|^n - 1 = (|q| - 1)(|q|^{n-1} + |q|^{n-2} + \ldots + |q| + 1),$$

откъдето (понеже $|q| > 1$), имаме че $|q|^n - 1 \geq n(|q| - 1)$. Сега, записвайки $|q|$ във вида $|q| = 1+p$ $(p>0)$, получаваме неравенството $|q|^n \geq 1 + np$, което, при $n \to \infty$, показва, че $|q|^n > r$, за вс. реално число r, за почти вс. n, понеже очевидно $1 + np > r$, за почти вс. n. За да докажем твърдението от т. 1), прилагаме т. 2) към редицата $\{q_o^n\}$, $q_o = 1/|q|$, а след това – Твърдение 3. Останалата част от доказателството на Твърдение 4 се препоръчва като полезно упражнение на читателя.

г) Граничен преход в неравенства.

Нека $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ са сходящи редици с граници съответно числата a и b. По отношение на неравенствата са валидни следните правила.

А) Ако $a_n \leq b_n$, за n от някое нататък, то и $a \leq b$.

Забележка: Прости случаи като $a_n = 0$ $(\forall n)$, $b_n = 1/n$ показват, че дори между общите членове на редиците да има строго неравенство, неравенството между съответните граници е изобщо нестрого (в посочения пример границите са равни).

Б) Ако $\{c_n\}$ е редица, за която $a_n \leq c_n \leq b_n$, при n от някое нататък и $a=b=l$, то и редицата $\{c_n\}$ е сходяща и $\lim c_n = l$ $(n \to \infty)$.

Доказателството на А) е известно от училищния курс по математика (вж. напр. [П.П]): Ако допуснем противното, т.е. $b < a$, ограждаме a и b с непресичащи се околности (направете чертеж !) и понеже , от някое n нататък, всяко от числата a_n , b_n ще се намира в съответната околност, заключаваме, че $a_n > b_n$ (от някое n нататък) – противно на даденото по условие. И по отношение на Б) можем да се позовем на познати разсъждения: Аko k е произволно (фиксирано) естествено число, от двойното неравенство (по условие) и понеже a и b са граници на съответните редици, за почти вс. n ще е изпълнено следното двойно неравенство:

$$a - 1/k < a_n \leq c_n \leq b_n < b + 1/k \text{ , т.е.}$$
$$l - 1/k < c_n < l + 1/k \text{ ,}$$

предвид че $a = b = l$ (по предположение). Но последното неравенство всъщност означава, че $\{c_n\}$ е сходяща редица, с граница l (защото за вс. $\varepsilon > 0$ ще се намери такова k , че $1/k < \varepsilon$). С това и Б) е доказано.

д) Монотонни редици.

Една числова редица $\{a_n\}$ наричаме монотонно растяща (намаляваща), ако е изпълнено неравенството $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$), за всяко $n = 1,2,3, \ldots$. Редицата наричаме монотонна, ако е или монотонно растяща, или монотонно намаляваща. Тя се нарича строго монотонна (м. растяща/ м.намаляваща), когато съответното неравенство между съседни членове е строго.

Ясно е, че всяка монотонно растяща редица е ограничена отдолу (защото $a_1 \leq a_n$, за вс. n), а всяка монотонно намаляваща е ограничена отгоре .И за да бъде ограничена дадена монотонна редица, е (необходимо и) достатъчно да бъде ограничена отгоре (отдолу), когато е растяща (намаляваща).

Монотонните редици имат следното основно свойство.

Твърдение 5.

Всяка ограничена монотонна редица е сходяща. Т.е., всяка ограничена отгоре (отдолу) монотонно растяща (намаляваща) редица е сходяща.

За *доказателството* в случай на растяща редица ще си послужим с т.н. принцип за непрекъснатост на множеството от реални числа (вж. т. 3, по-долу). Този принцип гарантира, че от всички константи C, за които: $a_n \leq C$, за вс. n, има една най-малка, да я означим с l. (По предположение $\{a_n\}$ е ограничена отгоре монотонно растяща редица и по тази причина съществува поне едно число C: $a_n \leq C$, за вс. n.) Щом l е минималната в горния смисъл константа, то $a_n \leq l$ и освен това, каквото и по-малко от l число c_o $(c_o < l)$ и да вземем, ще има елемент a_N от редицата между числата c_o и l , т.е. $c_o < a_N \leq l$ и тогава ще е изпълнено и неравенството $c_o < a_n \leq l$, за вс. $n > N$ (предвид монотонността на редицата). Но вземайки $c_o = l- \varepsilon$, за произволно $\varepsilon > 0$, получаваме, че: $l-\varepsilon < a_n \leq l < l+\varepsilon$, за почти всички n. Т.е. $\{a_n\}$ е сходяща редица и $\lim a_n = l$ $(n \to \infty)$. Когато имаме намаляваща редица, прилагаме горните разсъждения за редицата с общ член $b_n = -a_n$ (която очевидно е растяща).

3). Ограничени редици. Подредици. Принцип за непрекъснатост.

Един основен белег на ограничените редици е в това, че всяка такава, ако евентуално не е сходяща, със сигурност има подмножество от безкрайно много нейни членове, които “се сгъстяват” около някакво число. За да изясним този ефект, първо ще въведем понятието *точка на сгъстяване.*

Дефиниция. Едно число x_o наричаме точка на сгъстяване за дадено множество X от реални числа, ако във всяка околност на x_o се съдържат елементи на X, различни от x_o. Една т.a е точка на сгъстяване за дадена редица $\{a_n\}$, когато във всяка околност на a има поне един член a_k от редицата, различен от a.

Ясно е, че границата на дадена сходяща редица е нейна точка на сгъстяване, при това единствена. Ако a е границата на редицата и допуснем, че b, $b \neq a$, е още една точка на сгъстяване, да оградим a с околност, която не съдържа b (направете чертеж !). Тъй като вън от околността може да има само краен брой (евентуално 0) членове на редицата, несъвпадащи с b, то има число $r > 0$, по-малко от разстоянието до b на всички a_n, несъвпадащи с b. Значи в околността на b с радиус r не се съдържа никакъв член $a_k \neq b$, противно на допускането. Т.е. друга точка на сгъстяване, освен границата, не може да има.

Сега става интересен въпросът, ако една ограничена редица има единствена точка на сгъстяване, дали е сходяща. Положителният отговор на този въпрос следва от едно класическо твърдение, известно като *Теорема на Болцано-Вайерщрас* (вж. по-долу), според което всяка ограничена редица притежава поне една точка на сгъстяване: Ако a е единствената т. на сгъстяване на дадена ограничена редица $\{a_n\}$ и допуснем, че редицата е разходяща, то ще има някаква околност на a , вън от която ще останат безкрайно много членове a_k. Наредени по възходящ ред на номерата, тези членове образуват една нова безкрайна редица $\{A_n\}$ (всяко A_n е някое от числата a_k), която обаче е ограничена и съгласно теоремата на Болцано-Вайерщрас притежава някаква т. на сгъстяване A, която очевидно не може да съвпада с a (използвайте чертеж). Но и т.A е всъщност т. на сгъстяване (вече втора !) на редицата $\{a_n\}$, което противоречи на единствеността на т.a. Значи редицата $\{a_n\}$ е сходяща, при което границата и’ съвпада с a (иначе бихме имали сходяща редица с две точки на сгъстяване, което видяхме, че е невъзможно).

а) Основни свойства на ограничените редици.

Теорема на Болцано-Вайерщрас.
Всяка ограничена редица има поне една точка на сгъстяване.

За да *докажем* теоремата, първо фиксираме един краен интервал (x_1, x_2), който съдържа всички членове a_n на разглежданата редица (такъв очевидно има, предвид ограничеността на редицата). Нека $d = x_2 - x_1$ е дължината на интервала. Ако l_1 е средата на интервала, то поне в едната от двете половини, напр. подинтервала $[l_1, x_2] = [l_1, l_1+d/2]$, се съдържат безкрайно много членове на редицата. Сега ще построим една безкрайна монотонно растяща редица с общ член l_n $(n = 1,2, \ldots)$ посредством последователно разделяне наполовина, по следния начин: Нека l_2 е средата на подинтервала $[l_1, l_1+d/2] = [l_1, x_2]$ (вж. рис.3), когато в дясната му половина се съдържат безкрайно много членове a_n, в противен случай полагаме $l_2 = l_1$.

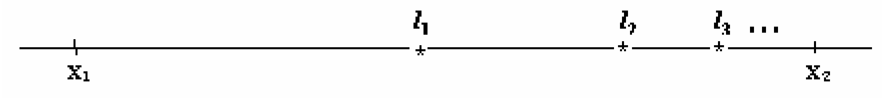

Рис.3

Понеже в поне една от двете половини на $[l_1, l_1+d/2]$ ще има безкрайно много членове a_n, по горепосочения начин за определяне на l_2 в подинтервала $[l_2, l_2+\frac{d}{2^2}]$ се намират също безкрайно много такива членове. След това за l_3 вземаме средата на $[l_2, l_2+\frac{d}{2^2}]$, ако в дясната половина на този подинтервал се съдържат безкрайно много членове a_n, а в противен случай – $l_3 = l_2$ и т.н. (за l_4, l_5, ...). По така описаната конструкция имаме, че $l_n \le l_{n+1} \le l_n + \frac{d}{2^{n+1}}$, $n=1,2,\ldots$, от където е ясно че $\{l_n\}$ е монотонно растяща и ограничена отгоре, като $l_n \le x_2$ и освен това във всеки от интервалите $[l_n, l_n+\frac{d}{2^n}]$ се съдържат безкрайно много членове a_k. От Твърдение 5 следва, че $\{l_n\}$ е сходяща редица и нека l е границата й. Очевидно l е точка на сгъстяване за редицата $\{a_n\}$, понеже във всяка ε – околност на l се съдържат почти всички l_n и за всички n от някое нататък интервалът $\Delta_n = [l_n, l_n+\frac{d}{2^n}]$ ще се съдържа в околността $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$. А в Δ_n има безкрайно много членове a_k.

Известно прецизиране на теоремата на Болцано-Вайерщрас представлява т.н. *принцип за компактност* (вж. Твърдение 6 по-долу). По този повод най-напред ще се спрем на понятието *подредица*. Една предварителна представа за подредици вече имаме: редицата $\{\Delta_n\}$, построена по-горе, е типичен случай на подредица.

Дефиниция (Подредица). Ако от членовете на дадена безкрайна редица $\{a_n\}$ по произволен начин изберем безкрайно много, нарадени по възходящ ред на номерата им, получената нова безкрайна редица. $\{A_k\}$. наричаме подредица на редицата $\{a_n\}$.

Коментар: Всеки елемент A_k, k = 1, 2, …., е някой от членовете a_n с номер n, равен на някакво естествено число n_k, като $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. Частни случаи на подредици ще получим, ако изберем членовете с нечетни или с четни номера:

$$a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2n-1}, \ldots ;$$
$$a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2n}, \ldots \quad .$$

В първия от тези примери имаме редица (подредица на $\{a_n\}$) с общ член $A_n = a_{2n-1}$, а във втория - $A_n = a_{2n}$.

Твърдение 6 (Принцип за компактност).
Всяка ограничена редица притежава поне една сходяща подредица.

Доказателството ще получим като лека модификация на това за теоремата на Болцано-Вайерщрас: ако $\{a_n\}$ е ограничена редица и l е нейна точка на сгъстяване, от всеки интервал от вида $(l-1, l+1), (l-\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}), (l-\frac{1}{3}, l+\frac{1}{3}), \ldots, (l-\frac{1}{k}, l+\frac{1}{k}), \ldots$ можем да изберем по един член a_n, с номер $n = n_k$, така че $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$. Това е възможно, понеже във всяка околност на т. l има безкрайно много елементи от $\{a_n\}$. Означаваме избраните по този начин членове съответно с $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k, \ldots$. Редицата $\{A_n\}$ удовлетворява неравенствата $l - \frac{1}{n} < A_n < l + \frac{1}{n}$, откъдето след граничен преход, $n \to \infty$, съгласно правило Б), т.2 г) заключаваме, че $\{A_n\}$е сходяща и $\lim_{n\to\infty} A_n = l$.

б) Принцип за непрекъснатост.

Тук ще разгледаме ключовия въпрос има ли най-малко число c^*, за дадено ограничено отгоре множество M, така че $\forall x \in M$ да имаме $x \le c^*$. (Едно приложение на този въпрос вече направихме в Твърдение 5.)

Ще започнем с понятията *долна* и *горна граница* на дадено ограничено множество.

Дефиниция. Ако M е ограничено отдолу множество от реални числа, всяка константа c, такава че $c \le x, \forall x \in M,$ наричаме *долна граница* на M. Аналогично, ако M е ограничена отгоре, всяка константа $C,$ за която $x \le C, \forall x \in M$, наричаме *горна граница* на M.

Очевидно, ако C е горна граница на едно ограничено отгоре множество $M,$ то всяка константа $C' > C$ е също горна граница на M.

Следователно интересният въпрос в случая е има ли най-малка измежду горните граници на M. Аналогичен въпрос имаме и по отношение на ограничените отдолу подмножества (тук въпросът е има ли най-голяма от всевъзможните долни граници).

Дефиниция (Супремум и инфимум). Най-малката горна граница (ако съществува) на дадено ограничено отгоре множество M наричаме *точна горна граница* на M или *супремум* (*supremum*) и означаваме със $\sup M$ стойността й. Аналогично, ако M е ограничено отдолу множество, най-голямата долна граница (ако съществува) на M наричаме *точна долна граница* или *инфимум* (*infimum*) на M и означавме стойността й като $\inf M$.

Поставеният по-горе въпрос за съществуването на супремум (инфимум) получава положителен отговор чрез следния ключов в теорията на реалните числа

Принцип за непрекъснатост (на множеството от реални числа).

Всяко ограничено отгоре (отдолу) множество от реални числа притежава точна горна (долна) граница.

Коментар: Ако принципът е валиден за ограничените отгоре множества, неговата валидност за ограничените отдолу следва автоматично. Наистина, ако M е ограничено отдолу, то множеството M' от всички числа от вида $(-1).x,\ \ x \in M$, е ограничено отгоре и ако $l' = \sup M'$, то $\exists \inf M$ и $(-1).l' = \inf M$. Последното заключение е всъщност очевидно, понеже от $-x \le l'$ следва $-l' \le x,\ \forall x \in M$, т.е. $-l'$ е долна граница на M и освен това, ако имахме число $c' > -l'$, което също да е долна граница на M, то $-c'$ $(-c' < l')$ би било горна граница на M' $(c' \le x$, т.е. $-x \le -c';\ \forall x \in M)$, при това по-малка от най-малката (което е абсурд).

След кратка подготовка ще се убедим във валидността на принципа за непрекъснатост. В строгото систематично изграждане на теорията на реалните числа основополагаща роля играят т.н. модели на Кантор и Дедекинд – на множеството от реални числа (Георг Кантор, 1845 – 1918, немски математик; Ричард Дедекинд, 1831 – 1916, също немски математик). Като следствие от модела на Кантор ще формулираме без доказателство едно твърдение, чиято значимост, в предполаганата тук теоретична рамка на реалните числа, позволява да го наречем *принцип на Кантор*. Неговата валидност се гарантира в известен смисъл *автоматично* от самия канторов модел (относно двата модела и тяхната еквивалентност – вж. напр. [Я.Т.]). За формулировката на принципа ще имаме нужда от следната

Дефиниция. Една безкрайна редица $\{p_n\}$ от рационални числа наричаме *фундаментална*, ако за всяко рационално $\varepsilon > 0$ съществува естествено число $N = N(\varepsilon)$, така че неравенството $|\ p_n - p_m\ | < \varepsilon$, е изпълнено за всяка двойка естествени числа $\{n,m\}$: $n > N,\ m > N$.

Принцип на Кантор.

Всяка фундаментална редица е сходяща.

Въз основа на принципа на Кантор ще дадем следното просто *доказателство* на принципа за непрекъснатост. Ако M е ограничено отгоре множество от реални числа, най-напред ще намерим цяло число l_1, което е горна граница на M, а $l_1 - 1$ – не е. За целта фиксираме произволна т. $x_o \in M$ и една горна граница C на M, а след това – двойка цели числа $N_1',\ N_1'':\ N_1' < x_o$, $N_1'' \geq C$. Тъй като N_1'' е горна граници на M , а N_1' не е ($N_1' < N_1''$), ясно е че между тях има цяло число l_1 (то може евентуално да съвпада с N_1'') с желаните свойства. Разделяйки интервала $[l_1 - 1, l_1]$ на две, последвано от по-нататъшно разделяне на две на следващи половинки, ще построим монотнно намаляваща редица $\{l_n\}$ от рационални числа: за построяването на l_2 използваме средата m_2 на $[l_1 - 1, l_1]$; т. m_2 или е горна границi на M, или не е. Ако m_2 е горна граница полагаме $l_2 = m_2$, при което $l_2 - \frac{1}{2}$ вече не е горна граница (понеже $l_2 - \frac{1}{2} = l_1 - 1$) . Ако m_2 не е горна граница, полагаме $l_2 = l_1$ и отново имаме че $l_2 - \frac{1}{2}$ не е горна граница на M. За да построим l_3 , използваме средата m_3 на интервала $[l_2 - \frac{1}{2}, l_2]$ и прилагаме за m_3 разсъжденията от случаите с m_2: получаваме число $l_3 \leq l_2$ $(l_2 \leq l_1)$, което е горна граница на M, а $l_3 - \frac{1}{2^2}$ не е. Ако елементите $l_1, l_2, ..., l_k$ $(k \geq 1)$ са вече построени, като числата l_j са горни граници на M, а $l_j - \frac{1}{2^{j-1}}$ не са, $j = 1, 2, ..., k$, $k+1-$я член l_{k+1} определяме еднозначно посредством средата m_{k+1} на интервала $[l_k - \frac{1}{2^{k-1}}, l_k]$, по познатия начин, според това дали m_{k+1} е или не е горна граница на M. Така получихме безкрайна монотонно намаляваща редица от рационални числа $l_n, n = 1, 2, ...,$ такава че

$$0 \leq l_n - l_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}. \qquad (14)$$

За разликата $l_n - l_m$, за всяка двойка естествени числа $\{n, m\}$, където например $m > n,\ m = n + k,$ най напред намираме, че

$$|l_n - l_m| = |(l_n - l_{n+1}) + (l_{n+1} - l_{n+2}) + ... + (l_{n+k-1} - l_{n+k})| \leq |l_n - l_{n+1}| + |l_{n+1} - l_{n+2}| + ... + |l_{n+k-1} - l_{n+k}|$$

(от известното нервенство на триъгълника), откъдето, предвид (14), следва:

$$|l_n - l_{n+k}| \leq \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{k-1}}\right) \text{ ,т.е.}$$

$$|l_n - l_{n+k}| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ (понеже } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{k-1}} < 2).$$

Последното нервенство означава, че $\{l_n\}$ е фундаментална редица, тъй като $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0,$ за всички достатъчно големи n и от принципа на Кантор заключаваме, че $\{l_n\}$ е сходяща редица. Нека $l = \lim_{n\to\infty} l_n$; от нервенството $x \le l_n, \forall n, \forall x \in M$, при $n \to \infty$ получаваме, че l е горна граница на *M.* Ако допуснем, че някое число $l' < l$ е също горна граница, избираме такова n , че $l' < l_n - \frac{1}{2^{n-1}}$ (това е възможно, тъй като $l_n - \frac{1}{2^{n-1}} \to l, n \to \infty$) ; но $l_n - \frac{1}{2^{n-1}}$ не е горна граница на *M,* а тогава и l' не е. С това установихме, че l е точна горна граница на *M*.