Определяне на повърхниния и пространствения потенциал

1. Формулировка на пълната задача и свеждане до двойка проблеми.

Както е известно, от изходната постановка – основана на системата на Максвел за електростатиката, след заместване на основните величини с техни „сингулярни" („стъпаловидно - делта-образни") разлагания, за електрическия потенциал $u(x,z)$ на цялата (хетерогенна) материална система възниква следната задача:

(1.3) $\nabla^2 u = 0 \ (z \neq 0), \ x \in R^1$;

(1.4) $|u| \leq const., (x,z) \in R^2$;

(1.5)
a) $u(x,+0) = u(x,-0), \ x \in R^1$;
b) $u_z(x,+0) - u_z(x,-0) + \varepsilon_s u_{xx} = \varepsilon_s k_s^2 (u - \varphi_\infty)$, $x \neq 0$;

(1.6) $u(-\infty,0) = u(+\infty,0) = \varphi_\infty$;

(1.7)
a) $u(-0,0) = u(+0,0)$;
b) $\varepsilon_s [u_x(+0,0) - u_x(-0,0)] = -\beta_l$.

В уравнение (1.3) $\nabla^2 \equiv \partial_x^2 + \partial_z^2$ е т.н. оператор на Лаплас; u_x, u_z, u_{xx} са частни производни на $u(x,z)$ от първи и втори ред относно съответните променливи; $u(x,+0)$, $u(x,-0)$ са границите (по предположение крайни) $\lim_{z\to 0} u(x,z)$ (при $z > 0$ и $z < 0$) и аналогично - за $u_z(x,+0)$, $u_z(x,-0)$; $u(\pm 0,0) = \lim_{x\to 0} u(x,0)$ и $u_x(\pm 0,0) = \lim_{x\to 0} u_x(x,0)$, съответно при $x > 0, x < 0$; $u(\pm\infty,0) = \lim_{x\to\pm\infty} u(x,0)$. Параметрите k_s, ε_s са два от главните фактори в електростатичната природа на физическата система: материалният смисъл на параметъра k_s се представя от реципрочната му стойност $k_s^{-1} = \frac{1}{k_s}$ - известна като *повърхнинна Дебаева дължина* (Debye length); параметърът ε_s е т.н. *повърхнинна диелектрична проницаемост* (surface dielectric permitivity). Величините ε_s, k_s са положителни константи. Асимптотичната стойност на повърхнинния потенциал се счита за дадена отнапред – посредством параметъра φ_∞ (константа, вж. усл. (1.6)). Параметърът β_l участва като $\beta_l = \frac{\rho_l}{\varepsilon_0}$ посредством плътността ρ_l на електрическите заряди върху линейната фаза; $\varepsilon_0 = 8.85 \ pF/m$ е т.н. *абсолютна диелектрична проницаемост* (абсолютен вакуум).

Този тип задачи са известни като *трансмисионни* (transmission problems). В случая обаче се касае за нов тип трансмисионна задача – предвид наличието на два трансмисионни прехода (от различна размерност) – усл. (1.5.b) и усл. (1.7.b); при това единият преход – усл. (1.5.b) – е по същество диференциално съотношение от втори ред. Пълната задача (1.3) – (1.7) ще преработим посредством трансформация на Фурие по x-променливата; по този начин на дадено решение $u(x,z)$ съпоставяме Фурие-образа му $\hat{u}(\xi,z)$, т.е имаме едно изображение: $u(x,z)\xrightarrow{\mathbf{F}}\hat{u}(\xi,z)$. За *правата* и *обратната* трансформация на Фурие имаме предвид следните традиционни означения:

$$\mathbf{F}[\Phi](\xi)=\hat{\Phi}(\xi)\text{, където } \hat{\Phi}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x)\exp(-ix\xi)dx\,;$$

$$\mathbf{F}^{-1}[\hat{\Phi}](x)=\Phi(x)\text{, където } \Phi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\Phi}(\xi)\exp(ix\xi)d\xi\,.$$

(Тук $\Phi(x)$ е напр. непрекъсната функция, намаляваща по абс. стойност „достатъчно бързо”, при $|x|\to\infty$.)

Ако $u(x,z)$ е едно „класическо” решение на (1.3), след Фурие-трансформация по x в (1.3), за Фурие-образа $\hat{u}(\xi,z)$ получаваме следното ОДУ по z-променливата:

(1.8) $$\frac{d^2\hat{u}}{dz^2}-\xi^2\hat{u}=0\ (z\neq 0)\,.$$

Уравнението е с постоянни коефициенти (отн. z) и характеристичните му корени са $-|\xi|$ и $|\xi|$, и фундаментална система решения са двойката функции $\{\exp(-|\xi|z),\exp(|\xi|z)\}$; тогава общото решение на (1.8) има вида

$$\hat{u}(\xi,z)=C_1(\xi)\exp(-|\xi|z)+C_2(\xi)\exp(|\xi|z)\,,$$

във всяка от полуравнините $z\neq 0$, където свободните константи (отн. z) C_1 и C_2 зависят от ξ (като от параметър). От условието за ограниченост (вж. усл. (1.4)) обаче по необходимост следва, че общото ограничено решение може да бъде само от вида $\hat{u}(\xi,z)=C(\xi)\exp(-|\xi||z|)\ (z\neq 0)$; понеже $C(\xi)=\hat{u}(\xi,0)$, ако въведем означението $\varphi(x)=u(x,0)$, горния резултат можем да презапишем във вида

(1.9) $$\hat{u}(\xi,z)=\hat{\varphi}(\xi)\exp(-|\xi||z|)\ (z\neq 0)\,.$$

От последната формула, след диференциране по z, непосредствено изразяваме „скоковия” член от лявата част на (1.5.b) по следния начин:

$$u_z(x,+0)-u_z(x,-0)=L[\varphi]\ \ (L[\varphi]:\widehat{L[\varphi]}(\xi)\equiv -2|\xi|\hat{\varphi}(\xi)).$$

(Разбира се, по-горе $\widehat{L[\varphi]}(\xi)$ е Фурие-образът $\mathbf{F}[L[\varphi]](\xi)$ на функцията $L[\varphi](x)$.) Замествайки с полученото в условията на задача (1.3) – (1.7), виждаме, че тя се „разцепва” на два самостоятелни проблема:

Двойка класически задачи на Дирихле –

(1.10.a) $\nabla^2 u=0\ \ (z\neq 0)$;

(1.10.b) $u(x,0)=\varphi(x),\ \ x\in(-\infty,+\infty)$;

Контурна трансмисионна задача –

(1.11.a) $L[\varphi]+\varepsilon_s\varphi''=\varepsilon_s k_s^2(\varphi-\varphi_\infty),\ \ z=0, x\neq 0$;

(1.11.b) $\varphi(\pm\infty)=\varphi_\infty\,,\ \varphi(+0)=\varphi(-0)$;

(1.11.c) $\varepsilon_s[\varphi'(+0)-\varphi'(-0)]=-\beta_l$.

Решението на всяка от задачите (1.10.a) - (1.10.b) (при $z<0$ и $z>0$) е добре известно и се представя чрез т.н. *формула на Поасон*:

(1.12) $$u(x,z)=\frac{|z|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^2+z^2}.$$

По-долу ще намерим решението на контурната трансмисионна задача.

2. Решение на задачата за повърхнинния потенциал.

Първоначално ще опростим задача (1.11) посредством субституцията $\psi(x)\equiv\varphi(x)-\varphi_\infty$. Веднага ще отбележим, че $L[\varphi]=L[\psi]-\varphi_\infty.L[1]$ (от дефиницията на операцията $L[\bullet]$ - чрез Фурие-трансформация). Но $L[1]=0$ (което не сложно може да се съобрази от връзката между делта-функцията $\delta(x)$ и константата 1 - чрез Фурие-образите им: $\hat{\delta}=1$ и $\hat{1}=2\pi.\delta$; тази връзка използваме като известен факт). Така за функцията ψ получаваме следната задача:

(2.1) $$\psi''-k_s^2\psi=-\frac{1}{\varepsilon_s}L[\psi],\ x\neq 0;$$

(2.2) $$\varepsilon_s[\psi'(+0)-\psi'(-0)]=-\beta_l.$$

Горният ψ-проблем по предположение разглеждаме в пространството на реалните функции, които са непрекъснати в интервалите $(-\infty,-0],\ [+0,+\infty)$, клонят към нула, при $|x|\to\infty$ и принадлежат на класа $L_2(R^1)$ (от квадратично интегруемите в R^1 функции); освен това за ψ предполагаме, че има класическа гладкост при $x\neq 0$ и границите $\psi'(\pm 0)$ имат крайни стойности. (Такива решения на (2.1) – (2.2) ще наричаме *класически*.). Нека сега предположим, че ψ е класическо решение на задачата. В такъв случай имаме едно достатъчно гладко, ограничено решение на диференциалното уравнение

(2.3) $$w''-k_s^2w=-\frac{1}{\varepsilon_s}L[\psi],\ x\neq 0.$$

За горното линейно нехомогенно ОДУ (отн. неизвестната функция w) лесно се намира ограничено частно решение, което при това е непрекъсната функция навсякъде в R^1. Наистина, ако $w=W_s(x)$ е такова решение, замествайки с него в (2.3), допускаме, че имаме валидно, $\forall x$, тъждество, в което почленно извършваме трансформация на Фурие; получаваме алгебричното съотношение $(\xi^2+k_s^2)\hat{W}_s=\frac{1}{\varepsilon_s}\mathbf{F}[L[\psi]](\xi)$, откъдето следва, че единствената такава функция $W_s(x)$ е онази, чиито Фурие-образ е $\hat{W}_s=\frac{\mathbf{F}[L[\psi]](\xi)}{\varepsilon_s(\xi^2+k_s^2)}$. Сега да разгледаме функцията $w_s[\psi](x)\equiv\frac{1}{2k_s}L[\psi]*\exp(-k_s|\cdot|)(x)$, където $f*g$ е т.н. *конволюция* на две функции f и g, $[f*g](x)\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)dt$. Като използваме, че Фурие-образът на функцията $\exp(-k_s|x|)$ е $\frac{2k_s}{\xi^2+k_s^2}$ и свойството на конволюцията $\mathbf{F}[f*g](\xi)=\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$, непосредствено установяваме, че $W_s(x)=\frac{1}{\varepsilon_s}w_s[\psi](x)$; същевременно с горните пресмятания във Фурие-образи фактически сме извършили проверка, че $\frac{1}{\varepsilon_s}w_s[\psi](x)$ е (ограничено) решение на (2.3),

$\forall x$ и следователно е такова и в интервалите $x<0$, $x>0$. От тук, съгласно известния подход на Лагранж, за да намерим цялото пространатво от ограничени решения на (2.3), остава да сумираме обшото ограничено решение на хомогенното уравнение $w''-k_s^2 w=0$ (това е фамилията решения $C.\exp(-k_s\,|\,x\,|), x\neq 0$, C - произволна константа) с функцията $\frac{1}{\varepsilon_s}w_s[\psi](x)$. Последното означава, че и за специално интересуващата ни функция $\psi(x)$ (която е ограничено решение тъкмо на (2.3)) съществува константа c, така че е валидно представянето

$$\psi(x)=c.\exp(-k_s\,|\,x\,|)+\frac{1}{\varepsilon_s}w_s[\psi](x),\ x\neq 0\,. \qquad (2.4)$$

Константата cще определим след заместване в граничното условие (2.2). За целта първо ще се убедим, че функцията $w_s[\psi](x)$ има непрекъсната първа производна, $\forall x\in R^1$ - по следния начин. В (2.4) почленно прилагаме трансформация на Фурие и предвид че $\mathbf{F}[\exp(-k_s\,|\cdot|](\xi)=\frac{2k_s}{k_s^2+\xi^2}$ и $\mathbf{F}[w_s[\psi]](\xi)=\frac{-2\,|\,\xi\,|}{k_s^2+\xi^2}\hat{\psi}(\xi)$, получаваме:

$$\hat{\psi}(\xi)=\frac{2c\varepsilon_s k_s}{\varepsilon_s(k_s^2+\xi^2)+2\,|\,\xi\,|}\,. \qquad (2.5)$$

От тук имаме, че

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi^2}{k_s^2+\xi^2}\hat{\psi}(\xi)d\xi=2c\varepsilon_s k_s\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi^2 d\xi}{(k_s^2+\xi^2)[\varepsilon_s(k_s^2+\xi^2)+2\,|\,\xi\,|]}\,.$$

Но последният интеграл е сходящ и следвателно съществува (и е непрекъсната) производната

$$\left(w_s[\psi](x)\right)'=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}i\xi\exp(ix\xi)\mathbf{F}[w_s[\psi]](\xi)d\xi=-\frac{2c\varepsilon_s k_s}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i\xi\,|\,\xi\,|\exp(ix\xi)d\xi}{(k_s^2+\xi^2)[\varepsilon_s(k_s^2+\xi^2)+2\,|\,\xi\,|]}\,.$$

(Тук сме използвали, че вторият интеграл, зависещ от параметъра x, се мажорира от интеграла $\frac{2\,|\,c\,|\,\varepsilon_s k_s}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi^2 d\xi}{(k_s^2+\xi^2)[\varepsilon_s(k_s^2+\xi^2)+2\,|\,\xi\,|]}<+\infty$; но това означава, че $\int_{-\infty}^{+\infty}i\xi\exp(ix\xi)\mathbf{F}[w_s[\psi]](\xi)d\xi$ е сходящ равномерно относно x в компактните интервали.)

Сега диференцираме в (2.4), при $x\neq 0$:

$$\psi'(x)=-ck_s\exp(-k_s\,|\,x\,|)+\frac{1}{\varepsilon_s}\left(w_s[\psi](x)\right)'\ (x>0)\,;$$

$$\psi'(x)=ck_s\exp(-k_s\,|\,x\,|)+\frac{1}{\varepsilon_s}\left(w_s[\psi](x)\right)'\ (x<0)\,.$$

От двете последни равенства (съответно при $x\to+0$ и $x\to-0$) веднага се вижда, че $\varepsilon_s[\psi'(+0)-\psi'(-0)]=-c\varepsilon_s k_s$, а от граничното условие (2.2) намираме: $c=\frac{\beta_l}{\varepsilon_s k_s}$. С тази стойност на c заместваме в (2.5), прилагаме към него обратната Фурие-трансформация и заместваме в равенството $\varphi(x)=\varphi_\infty+\psi(x)=\varphi_\infty+2\beta_l\mathbf{F}^{-1}[\left(\varepsilon_s(k_s^2+\xi^2)+2\,|\,\xi\,|\right)^{-1}]$; така получаваме търсената формула:

$$\varphi(x)=\varphi_\infty+\frac{2\beta_l}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(x\xi)}{\varepsilon_s(k_s^2+\xi^2)+2\xi}d\xi\,. \qquad (2.6)$$

Забележка: За горния интеграл сме използвали обстоятелството, че ако $g(\xi)$ е четна интегруема функция, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\exp(ix\xi)d\xi = 2\int\limits_{0}^{+\infty} g(\xi)\cos(x\xi)d\xi$.

3. Формула за пространствения потенциал.

Сега решението $u(x,z)$ на пълната задача (1.3) – (1.7) се получава лесно. С резултата от (2.6) заместваме във формула (1.12), презаписана за удобство във вида

$$u(x,z) = \varphi_\infty + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \hat{\psi}(\xi)\exp(-|z|\xi)\cos(x\xi)d\xi;$$

така установяваме окончателния израз:

$$u(x,z) = \varphi_\infty + \frac{2\beta_l}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\exp(-|z|\xi)\cos(x\xi)}{\varepsilon_s(k_s^2+\xi^2)+2\xi}d\xi. \tag{3.1}$$

Коментар: ***параметрична идентификация – диагностика.***

Да означим с $u^0(x,z)$ функцията $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\exp(-|z|\xi)\cos(x\xi)}{\varepsilon_s(k_s^2+\xi^2)+2\xi}d\xi$. По данни от измервания $Y_j = Y_j(z)$ на електрическия потенциал $u(x,z)$, при фиксирано z (напр. $z >> 1$) и $x = x_j$, $j = 1 \div n$, и изчислени стойности $X_j = X_j(z)$ на функцията $u^0(x,z)$ ($X_j(z) = u^0(x_j, z)$), определянето (идентификацията) на параметрите φ_∞ и β_l е типична диагностична задача: когато върху стената на дадаен капиляр се е появила рязко изразена линия на максимални аномалии, тъкмо плътността на линейните заряди $\rho_l = \varepsilon_0\beta_l$ и асимптотичния ефект φ_∞ ще имат „аномални" стойности. Численото решаване на тази задача обаче е леко осъществимо чрез МНК. (*Упътване.* Използвайте целевата функция $F(\alpha,\beta) \equiv \sum_{j=1}^{n}[Y_j - (\alpha + 2\beta X_j)]^2$.) Точността на изчисленията се прецизира, ако повторим многократно процедурата при различни стойности на $z: z = z_1 \div z_m$, след което за окончателно идентифицирани $(\varphi_\infty)_{diagnostic}$, $(\beta_l)_{diagnostic}$ приемаме съответните средно-аритметични на $\alpha_i = \alpha(z_i)$, $\beta_i = \beta(z_i)$ ($i = 1 \div m$).

София, ФМИ – БФ
(10. 06. 2008, Т. Боев)