ИНТЕГРАЛНА ТРАНСФОРМАЦИЯ НА ФУРИЕ – ОСНОВНИ СВОЙСТВА

Уводни бележки.

Една съществена част от приложенията на Математическия анализ се осъществяват посредством т.н. трансформация на Фурие. В частност, трансформацията е основен инструмент в построяването и изследването на математически модели, използващи диференциални уравнения. И в интресуващия ни биодиагностичен модел (третиращ задача за електростатиката на хетерогенни среди) тази трансформация се използва активно – фактически като доминиращо техническо средство (вж. лекционния материал „Определяне на повърхнинния и пространствения потенциал”).

Както ще видим по-долу, трансформацията се дефинира посредством несобствен интеграл (по x-променливата), зависещ от параметър ξ. (Тук се акцентира върху естесвената „първа стъпка” в изучаването на трансформацията – когато $x, \xi \in R^1$.) От дадената дефиниционна формула непосредствено ще можем да установим, че трансформацията е приложима в частност към непрекъснатите в R^1 функции $f(x)$, за които интегралът $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ е сходящ. Посредством Фурие-трансформацията, от всяка такава функция еднозначно се дефинира „нова” (ще я наричаме Фурие-образ на f), която вече е функция на параметъра ξ. Да означим за удобство с CL_1 множеството на функциите $f(x)$ с горните свойства и с CL_∞ – множеството на непрекъснатите и ограничени в R^1 функции. Ако $\mathbf{F}[f](\xi)$ е Фурие-образът на $f(x)$, от дефиниционния интеграл (по-долу) ще можем не сложно да проверим, че $\mathbf{F}[f](\xi) \in CL_\infty$ $(\forall\, f \in CL_1)$. При това, от свойствата на интеграла, Фурие-трансформацията $\mathbf{F}: f(x) \to \mathbf{F}[f](\xi)$ представлява фактически линейно изображение (оператор), $\mathbf{F}: CL_1 \to CL_\infty$.

По-долу предлагаме автентичния текст от учебника на проф. Генчев по ЧДУ, отнасящ се до трансформацията на Фурие (вж. [1]). Препоръчително е да се обърне изрично внимание на приложенията в края на текста (в т.ч. съществената за електростатиката задача на Дирихле за уравнението на Лаплас). Като източник на значително разширени сведения за трансформацията на Фурие може да се използва специализирания учебник [2].

Цитирана литература.

1. Т. Генчев, Частни диференциални уравнения, Унив. изд. „Св. Климент Охридски”, София, 1999 г.

2. Т. Генчев, Разпределения и трансформация на Фурие, ФМИ-СУ „Св. Климент Охридски” (офсетно издание), София, 1982 г.

Трансформация на Фурие. Приложения

2.1. В тази точка са събрани няколко основни дефиниции и теореми, отнасящи се за несобствените интеграли, зависещи от параметри, които играят основна роля при изследването на трансформацията на Фурие.

Дефиниция 1. *Нека* $(x, \alpha) \to F(x, \alpha)$ *е функция, дефинирана и непрекъсната в ивицата* $G: -\infty < x < \infty,\ a \leqq \alpha \leqq b$ *и интегралът*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x, \alpha)\, dx \tag{1}$$

е сходящ за всяко $\alpha \in [a, b]$. *Ще казваме, че* (1) *е равномерно сходящ относно* $\alpha \in [a, b]$, *ако на всяко положително* ε *може да се съпостави такова* $N(\varepsilon)$, *че от неравенството* $p > N(\varepsilon)$ *да следва оценката*

$$\left| \int_{p}^{\infty} F(x, \alpha)\, dx \right| + \left| \int_{-\infty}^{-p} F(x, \alpha)\, dx \right| < \varepsilon$$

за всяко $\alpha \in [a, b]$.

Теорема 1. *Ако интегралът* (1) *е равномерно сходящ относно* $\alpha \in [a, b]$, *функцията*

$$g(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, \alpha)\, dx \tag{2}$$

е непрекъсната в интервала $[a, b]$.

Доказателството на тази почти очевидна теорема предоставяме на читателя. (В случай на нужда вж. [8] или кой да е друг пълен курс по анализ.)

Както и в теорията на безкрайните редове, в сила е следният прост, но важен **критерий на Вайерщрас:** *ако съществува функция* $f \geqq 0$, *за която интегралът* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ *е сходящ и условието* $|F(x, \alpha)| \leqq f(x)$ *е удовлетворено в цялата ивица* G, *интегралът* (1) *е равномерно сходящ относно* $\alpha \in [a, b]$.

Теорема 2. *Нека отново* $F \in C(G)$ *и производната* $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$ *съществува и е непрекъсната в* G. *Нека освен това интегралът* (1) *е сходящ за всяко* $\alpha \in [a, b]$ *и интегралът*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x, \alpha)\, dx \tag{3}$$

е равномерно сходящ относно α *от същия интервал. Тогава функцията* g, *дефинирана чрез* (2), *принадлежи на* $C^1[a, b]$ *и е в сила равенството*

$$g'(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x, \alpha)\, dx.$$

Доказателството е непосредствено и също може да се намери в [8].

2.2. Чрез следващата дефиниция се въвежда трансформацията на Фурие, която заема важно място в целия съвременен анализ.

Дефиниция 2. *Нека* f *е произволна функция от пространството* $L^1(\mathbf{R})$. *Функцията* $\widehat{f}$, *дефинирана чрез равенството*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)\, dx, \tag{4}$$

се нарича фуриерова трансформация на f. *Понякога вместо* $\widehat{f}$ *ще използваме и означението* $F(f)$.

За да илюстрираме дефиницията, ще разгледаме няколко примера.

Пример 1. Най-напред ще пресметнем фуриеровата трансформация на функцията $x \to e^{-a|x|}$, където $a > 0$. Очевидно имаме

$$F(e^{-a|x|})(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-ix\xi}\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{ax - ix\xi}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-ax-ix\xi}\, dx$$

$$= \frac{e^{(a-i\xi)x}}{a - i\xi}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-(a+i\xi)x}}{a+i\xi}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{a-i\xi} + \frac{1}{a+i\xi} = \frac{2a}{a^2+\xi^2}.$$

Пример 2. Като втори пример ще пресметнем $\widehat{f}$, където $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbf{R}$.

Прилагайки дефиницията, получаваме

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ix\xi}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos \xi x\, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin \xi x\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos \xi x\, dx.$$

(Вторият интеграл е нула, защото подинтегралната функция е нечетна.) Като диференцираме формално под знака на интеграла, намираме

(5) $$\frac{d\widehat{f}(\xi)}{d\xi} = -\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-x^2} \sin\xi x\, dx.$$

Очевидното неравенство

$$|\, x\, e^{-x^2} \sin\xi x \,| \leqq |\, x \,| e^{-x^2} \in L^1(\mathbf{R})$$

заедно с теорема 2 показва, че диференцирането е законно и следователно (5) наистина е в сила. Като интегрираме по части, получаваме

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-x^2} \sin\xi x\, dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \sin\xi x \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\xi}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos\xi x\, dx$$

$$= \frac{\xi}{2}\widehat{f}(\xi)$$

— резултат, който заедно с (5) ни води до диференциалното уравнение

$$\frac{d\widehat{f}}{d\xi} + \frac{\xi}{2}\widehat{f} = 0,$$

откъдето следва

(6) $$\left|\widehat{f}(\xi)\right| = C_1\, e^{-\frac{\xi^2}{4}}, \quad C_1 = \text{const} > 0.$$

Според (6) $\widehat{f}$ не се анулира — следователно имаме

(7) $$\widehat{f}(\xi) = C\, e^{-\frac{\xi^2}{4}},$$

като константата C засега е неизвестна. За да завършим, остава ни да положим $\xi = 0$ в (7). Получаваме

(8) $$C = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi},$$

т. е.

(9) $$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\xi^2}{4}}, \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

(Стойността на интеграла в (8) е известна от анализа.)

Следващите леми съдържат някои от най-основните свойства на трансформацията на Фурие.

Лема 1. *Ако $f \in L^1(\mathbf{R})$, то $\widehat{f} \in C(\mathbf{R})$.*

Доказателство. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно и $N = N(\varepsilon)$ е толкова голямо, че да имаме $\displaystyle\int_{|x|\geqq N} |f(x)|\, dx < \varepsilon$. Изборът на такова N е възможен, защото $f \in L^1(\mathbf{R})$. Ако фиксираме $\xi \in \mathbf{R}$, за произволно $h \in \mathbf{R}$ намираме

$$|\,\widehat{f}(\xi+h) - \widehat{f}(\xi)\,| = |\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\,(e^{-ixh} - 1)\, f(x)\, dx\,|$$

(10) $$\leqq \int_{-N}^{N} |\, e^{-ixh} - 1\,|\,|\, f(x)\,|\, dx + 2\int_{|x|\geqq N} |\, f(x)\,|\, dx$$

$$\leqq \int_{-N}^{N} |\, e^{ixh} - 1\,|\,|\, f(x)\,|\, dx + 2\varepsilon,$$

защото очевидно $|\, e^{-i\xi x}\,| = 1$. Понеже функцията $z \to e^z$, $z \in \mathbf{C}$ е непрекъсната в точката $z = 0$, съществува такова $\delta = \delta(\varepsilon)$, че от $|\, z\,| < \delta$ да следва $|\, e^z - 1\,| < \varepsilon$, $z \in \mathbf{C}$. Ето защо за всяко $h \in \mathbf{R}$, удовлетворяващо неравенството $|\, h\,| < \frac{\delta}{N}$, ще имаме $|\, e^{-ixh} - 1\,| < \varepsilon$ в целия интервал $[-N, N]$. След тази констатация от (10) получаваме

$$|\,\widehat{f}(\xi+h) - \widehat{f}(\xi)\,| \leqq \varepsilon \int_{-N}^{N} |\, f(x)\,|\, dx + 2\varepsilon \leqq \varepsilon \left(2 + \int_{-\infty}^{\infty} |\, f(x)\,|\, dx\right)$$

и завършваме доказателството.

Лема 2 (на Риман–Лебег). *Ако $f \in L^1(\mathbf{R})$, то $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.*

Доказателство. Да означим с $L_s(\mathbf{R})$ линейното подпространство на $L^1(\mathbf{R})$, образувано от стъпаловидните функции с компактен носител. С други думи, елементите на $L_s(\mathbf{R})$ са крайни линейни комбинации (с комплексни коефициенти) от характеристични функции на ограничени интервали от $\mathbf{R}$. От реалния анализ е известно, че $L_s(\mathbf{R})$ е навсякъде гъсто в $L^1(\mathbf{R})$.

Най-напред ще докажем лема 2 за функциите от $L_s(\mathbf{R})$. От казаното по-горе е ясно, че можем да се ограничим с разглеждането на характеристични функции на ограничени интервали. Нека

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & a < x < b, \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

е една такава функция. (Стойностите на φ в краищата на интервала $[a, b]$ са без значение.) Като приложим дефиницията, получаваме

(11) $$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_a^b e^{-ix\xi}\, dx = \frac{e^{-ia\xi} - e^{-ib\xi}}{i\xi},$$

откъдето следва $|\widehat{\varphi}(\xi)| \leqq \frac{2}{|\xi|}$ и в частност $\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{\varphi}(\xi) = 0$.

С това лема 2 е доказана за елементите на $L_s(\mathbf{R})$.

Нека сега $f \in L^1(\mathbf{R})$ е произволна. Да вземем $\varepsilon > 0$ и да изберем $\varphi \in L_s(\mathbf{R})$ по такъв начин, че да имаме $\|f - \varphi\|_1 < \varepsilon$. (Тук се използва, че $L_s(\mathbf{R})$ е навсякъде гъсто в $L^1(\mathbf{R})$.) При този избор на φ получаваме

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{\varphi}(\xi)| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - \varphi(x)|\, dx = \|f - \varphi\|_1 < \varepsilon, \quad \xi \in \mathbf{R},$$

което ни дава $|\widehat{f}(\xi)| \leqq |\widehat{\varphi}(\xi)| + \varepsilon$. За да завършим, да изберем $N = N(\varepsilon)$ толкова голямо, че за $|\xi| > N(\varepsilon)$ да имаме $|\widehat{\varphi}(\xi)| < \varepsilon$. За такива ξ намираме $|\widehat{f}(\xi)| \leqq 2\varepsilon$ и завършваме доказателството.

Лема 3. *Ако $f \in L^1(\mathbf{R})$ е диференцируема функция, за която и $f' \in L^1(\mathbf{R})$, то е изпълнено равенството*

(12)
$$F(f')(\xi) = i\xi\, F(f)(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

Ако пък $f \in L^1(\mathbf{R})$ и $x f \in L^1(\mathbf{R})$, имаме

(13)
$$F(x f)(\xi) = i \frac{d}{d\xi} F(f)(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

Доказателство. Най-напред ще установим, че от включванията $f \in L^1(\mathbf{R})$, $f' \in L^1(\mathbf{R})$ следват равенствата

(14)
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Наистина теоремата на Лайбниц и Нютон ни дава тъждеството

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt, \quad x \in \mathbf{R},$$

от което следва, че границите $l_1 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to+\infty} f(x)$ и $l_2 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to-\infty} f(x)$ съществуват, защото интегралите $\int_0^\infty f(x)\, dx$ и $\int_{-\infty}^0 f(x)\, dx$ са сходящи по предположение. След това наблюдение става почти очевидно, че числата l_1 и l_2 са равни на нула. Например, ако допуснем, че $l_1 \neq 0$, за достатъчно голямо x бихме имали $|f(x)| > \frac{|l_1|}{2}$, което е невъзможно, защото води до заключението, че $\int_0^\infty |f(x)|\, dx = \infty$. Равенството $l_2 = 0$ се установява аналогично. Следователно релациите (14) са доказани.

Сега вече можем да получим и (12). За тази цел е достатъчно да извършим граничния преход $N \to +\infty$ в тъждеството

$$\int_{-N}^{N} e^{-ix\xi} f'(x)\, dx = e^{-ix\xi} f(x)\Big|_{-N}^{N} + i\xi \int_{-N}^{N} e^{-ix\xi} f(x)\, dx,$$

което се установява с интегриране по части. Най-сетне, опирайки се на теорема 2, диференцираме дефиниционното равенство (4) и намираме

$$\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi) = -i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\, x f(x)\, dx,$$

т. е. (13). Грубо казано, равенствата (12) и (13) означават, че трансформацията на Фурие превръща диференцирането в умножение с независимата променлива и обратно.

Централният резултат в теорията на фуриеровата трансформация е формулата за обръщане, към чийто извод пристъпваме. Както често се случва с ключовите резултати в математиката, тя може да се формулира и докаже при различни предположения. За нашите цели следващият вариант е напълно достатъчен.

Теорема 3 (формула за обръщане). *Ако f и $\widehat{f}$ принадлежат на $L^1(\mathbf{R})$, равенството*

(15)
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\, \widehat{f}(\xi)\, d\xi$$

е удовлетворено почти навсякъде в $\mathbf{R}$.

Доказателство. Най-напред ще докажем формулата за елементите на $L_s(\mathbf{R})$. Понеже всички такива функции са линейни комбинации на характеристични функции на ограничени интервали, можем да се ограничим с разглеждането само на характеристични функции. Да вземем например

(16)
$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & a < x < b, \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Понеже $\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{e^{-ia\xi} - e^{-ib\xi}}{i\xi}$ (вж. (11)), (15) се проверява непосредствено.

Наистина, изхождайки от познатото равенство $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$, получаваме

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{x}\, dx = 2 \int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{x}\, dx = \pi\, \mathrm{sign}\lambda, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

След тази констатация последователно намираме

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\,\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(x-a)\xi}-e^{i(x-b)\xi}}{\xi}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x-a)\xi-\sin(x-b)\xi}{\xi}\,d\xi = \frac{1}{2}\{\operatorname{sign}(x-a)-\operatorname{sign}(x-b)\} = \varphi(x)$$

за $x \neq a,\ x \neq b$. Следователно в разглеждания случай (15) е в сила почти навсякъде в $\mathbf{R}$. С това проверката на (15) в $L_s(\mathbf{R})$ е завършена.

За да докажем (15) за произволна функция от $L^1(\mathbf{R})$, за която и $\widehat{f} \in L^1(\mathbf{R})$, имаме нужда от

Лема 4. *Ако $\varphi \in L_s(\mathbf{R})$, за всяко $N > 0$ е в сила оценката*

$$\left|\int_{-N}^{N} e^{-ix\xi}\,\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi\right| \leqq M, \quad x \in \mathbf{R},$$

с константа M, зависеща само от φ.

Доказателство. Отново можем да се ограничим само с функцията (16). В този случай получаваме

$$\left|\int_{-N}^{N} e^{-ix\xi}\,\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi\right| = \left|\int_{-N}^{N} \frac{e^{-i(x+a)\xi}-e^{-i(x+b)\xi}}{\xi}\,d\xi\right|$$

$$= \left|\int_{-N}^{N} \frac{\sin(x+a)\xi-\sin(x+b)\xi}{\xi}\,d\xi\right| = 2\left|\int_{N(x+b)}^{N(x+a)} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| < 4\pi$$

и завършваме доказателството.

Сега вече можем да се заемем с общия случай. Нека $f \in L^1(\mathbf{R})$ и освен това $\widehat{f} \in L^1(\mathbf{R})$. Понеже $\widehat{f} \in L^1(\mathbf{R})$, имаме право да дефинираме нейната фуриерова трансформация $\widehat{\widehat{f}}$, която според леми 1 и 2 е непрекъсната и ограничена в $\mathbf{R}$. Да вземем произволно $\varphi \in L_s(\mathbf{R})$ и да преработим $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{f}}(x)\,\varphi(x)\,dx$ с помощта на теоремата на Фубини. Получаваме

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{f}}(x)\,\varphi(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\,\widehat{f}(\xi)\,d\xi\right)\varphi(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\,\varphi(x)\,dx\right)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi.\end{aligned} \tag{17}$$

(Теоремата на Фубини е приложима, защото

$$\iint_{\mathbf{R}^2} \left|e^{-ix\xi}\,\widehat{f}(\xi)\,\varphi(\xi)\right|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(\xi)\right|\,d\xi \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\,dx = \|\widehat{f}\|_1\,\|\varphi\|_1 < \infty.)$$

Нашата следваща задача е да докажем равенството

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{\varphi}}(x)\,f(x)\,dx. \tag{18}$$

Очевидно

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\xi)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\,f(x)\,dx\right)d\xi,$$

но сега теоремата на Фубини е неприложима, защото $\widehat{\varphi} \notin L^1(\mathbf{R})$. Ето защо ще започнем по-отдалеч. Да вземем $N > 0$ и да го фиксираме. Очевидно

$$\begin{aligned}\int_{-N}^{N} \widehat{f}(\xi)\,\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi &= \int_{-N}^{N} \widehat{\varphi}(\xi)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\,f(x)\,dx\right)d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{-N}^{N} e^{-ix\xi}\,\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi\right)dx,\end{aligned}$$

защото интегрирането по ξ е в крайни граници. И така установихме

$$\int_{-N}^{N} \widehat{f}(\xi)\,\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{-N}^{N} e^{-ix\xi}\,\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi\right)dx. \tag{19}$$

Като използваме лема 4 и извършим граничния преход $N \to \infty$ с помощта на теоремата на Лебег, получаваме (18). Сега вече сме съвсем близо до целта. Като комбинираме (17) и (18), намираме

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{f}}(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{\varphi}}(x)\,f(x)\,dx &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(-x)\,f(x)\,dx \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)\,\varphi(x)\,dx,\end{aligned} \tag{20}$$

защото според формулата за обръщане (вече доказана в $L_s(\mathbf{R})$) имаме $\widehat{\widehat{\varphi}}(x) = 2\pi\,\varphi(-x)$ и (20) ни дава

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\widehat{\widehat{f}}(x) - 2\pi\,f(-x)\right\}\varphi(x)\,dx = 0. \tag{21}$$

Понеже φ е произволна функция от L_s, което е навсякъде гъсто в L^1, от (21) следва, че $\hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$ почти навсякъде в $\mathbf{R}$.

Тъй като това тъждество очевидно е равносилно с (15), доказателството е завършено.

2.3. В тази точка ще дефинираме т. нар. *конволюция* — важна операция, тясно свързана с трансформацията на Фурие.

Дефиниция 3. *Нека f и g са произволни функции от $L^1(\mathbf{R})$. Функцията*

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy, \tag{22}$$

която е дефинирана почти навсякъде в $\mathbf{R}$, се нарича конволюция на f и g. Възприето е означението $h = f * g$.

За да се убедим, че дефиницията е смислена, достатъчно е да забележим, че двойният интеграл

$$I = \iint_{\mathbf{R}^2} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dx\,dy \tag{23}$$

е сходящ, защото имаме

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|\,dy = \|f\|_1\,\|g\|_1, \tag{24}$$

и да се възползваме от теоремата на Фубини. Тъй като неравенството

$$|h(x)| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy$$

е в сила почти навсякъде в $\mathbf{R}$, от (23) и (24) следва, че $f * g \in L^1(\mathbf{R})$ и освен това

$$\|f * g\|_1 \leqq \|f\|_1\,\|g\|_1. \tag{25}$$

Тъждеството $f * g = g * f$ се проверява чрез субституцията $t(y) = x - y$ в дефиниционното равенство.

Теорема 4. *Равенството*

$$F(f * g) = F(f)\,F(g) \tag{26}$$

е в сила за произволна двойка $f \in L^1(\mathbf{R})$, $g \in L^1(\mathbf{R})$.

Доказателство. Имаме

$$F(f*g)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy \right) dx.$$

Понеже $I < \infty$, можем да разменим реда на интегрирането и да получим

$$F(f*g)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x-y)\,dx \right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t+y)\xi} f(t)\,dt \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,e^{-iy\xi}\,\hat{f}(\xi)\,dy = \hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi),$$

което искахме да докажем.

2.4. Ще завършим този параграф с две типични приложения на трансформацията на Фурие.

Като първо приложение ще разгледаме задачата на Дирихле

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x,\, y) \in G \subset \mathbf{R}^2, \tag{27}$$

$$u\big|_{y=0} = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{28}$$

където G е полуравнината $G\,:\, -\infty < x < \infty,\ y > 0$, а f е ограничена функция, принадлежаща на $L^1(\mathbf{R}) \cap C^2(\mathbf{R})$. Функцията $u(x,\,y) = y$ показва, че без допълнителни предположения не можем да очакваме теорема за единственост. Оказва се, че естественото допълнително изискване, което може да ни осигури желаната единственост, е ограничеността на u в полуравнината G (вж. зад. 5 от упражненията към § 6 на пета глава). Това минимално предположение обаче съвсем не е достатъчно, за да можем да се възползваме от трансформацията на Фурие. Ето защо, докато изведем формулата, която търсим, ще облекчим нашата задача, като допуснем, че съществува решение u на (27), (28), което като функция на x и y принадлежи на $C^2(\overline{G})$ и удовлетворява неравенствата

$$\begin{gathered} |u(x,\,y)| \leqq \frac{M}{1+x^2},\ |u_x(x,\,y)| \leqq \frac{M}{1+x^2},\ |u_y(x,\,y)| \leqq \frac{M}{1+x^2}, \\ |u_{xx}(x,\,y)| \leqq \frac{M}{1+x^2},\ |u_{yy}(x,\,y)| \leqq \frac{M}{1+x^2} \end{gathered} \tag{29}$$

с подходяща константа M.

След тази подготовка, ръководейки се от специалния вид на G, ще извършим трансформация на Фурие относно x при фиксирано $y \geqq 0$. Разбира се, получаваме

$$F(u_{xx}) + F(u_{yy}) = 0. \tag{30}$$

Да положим $v(\xi,\,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\,u(x,\,y)\,dx$. Според (29) при фиксирано y подинтегралната функция принадлежи на $L^1(\mathbf{R})$ заедно с производните си u_x и u_{xx}. Следователно можем два пъти да използваме (12) и да получим $F(u_{xx}) = -\xi^2 v$. От друга страна, теорема 2 и неравенствата (29) ни позволяват два пъти да диференцираме под знака на интеграла и да получим

$$v_{yy}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u_{yy}(x, y)\,dx = F(u_{yy}).$$

Тези тъждества заедно с (30) ни дават диференциалното уравнение

(31) $$v_{yy}(\xi, y) - \xi^2 v(\xi, y) = 0 \quad \xi \in \mathbf{R},\ y > 0,$$

което при фиксирано ξ се превръща в обикновено диференциално уравнение с постоянни коефициенти и се решава моментално. Получаваме

(32) $$v(\xi, y) = C_1(\xi)\, e^{-|\xi| y} + C_2(\xi)\, e^{|\xi| y},$$

където C_1 и C_2 са функции, които подлежат на определяне. Понеже първото от неравенствата (29) ни дава

$$|v(\xi, y)| \leqq M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \text{const}, \quad \xi \in \mathbf{R},\ y > 0,$$

като оставим в (32) y да клони към плюс безкрайност при фиксирано ξ, веднага заключаваме, че $C_2(\xi) = 0$, и стигаме до равенството

(33) $$v(\xi, y) = C_1(\xi)\, e^{-|\xi| y}.$$

Дойде време да използваме граничното условие (28). Като направим в равенството $u(x, 0) = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, трансформация на Фурие, намираме $v(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi)$ и (33) ни дава $C_1(\xi) = \widehat{f}(\xi)$, $\xi \in \mathbf{R}$. Получихме

(34) $$v(\xi, y) = \widehat{f}(\xi)\, e^{-|\xi| y}.$$

За да завършим, ще въведем функцията $g : \xi \to e^{-|\xi| y}$, $y > 0$, и ще пресметнем $h \overset{\text{def}}{=} F^{-1}(g)$. Тъй като $v = F(u)$, резултатът ще ни позволи да представим (34) във вида $F(u) = F(f)\, F(h)$ и въз основа на (26) да получим

(35) $$u = f * h.$$

И така да пресметнем $F^{-1}(g)$. Понеже

$$F^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi| y} e^{ix\xi}\, d\xi = \frac{1}{2\pi} F(g)(-x),$$

можем да се възползваме от пример 1. Намираме

$$h(x) = F^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{2y}{y^2 + x^2} = \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2}.$$

(Положителното число y е фиксирано.) Тъй като функцията $h : x \to h(x)$ принадлежи на $L^1(\mathbf{R})$, (35) наистина следва от (34). Остава ни да заместим в (35), за да стигнем до окончателния резултат

(36) $$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\, dt}{(x-t)^2 + y^2}, \quad y > 0,\ x \in \mathbf{R}.$$

Полученият израз се нарича интеграл на Поасон. Директната проверка показва, че ако $f \in C(\mathbf{R})$ и е ограничена върху $\mathbf{R}$, (36) наистина ни дава ограничено решение на задачата (27), (28). Предоставяйки подробностите на читателя, ще отбележим само, че равенството

$$\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(x-t)^2 + y^2} = 1,$$

което се получава чрез непосредствено пресмятане, играе съществена роля при проверката на граничното условие. Вижте упражненията за повече подробности.

Още един извод на формула (36) е скициран в зад. 11 от упражненията към § 4 на гл. 5.

Коментар. Хвърляйки поглед назад, забелязваме, че за да стигнем до (36), направихме редица предположения, които в края на краищата се оказаха излишни, макар че бързо ни доведоха до крайната цел. Този развой на събитията е типичен и се наблюдава при повечето от приложенията на трансформацията на Фурие.

Като второ просто приложение на трансформацията на Фурие ще изведем формулата на Даламбер, която дава решение на задачата на Коши за вълновото уравнение.

И така да разгледаме задачата

(37) $$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (x, t) \in \mathbf{R}^2,\ a = \text{const} > 0,$$

(38) $$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Както в предишния пример ще направим няколко допълнителни предположения за търсеното решение, които ще ни позволят да работим свободно с фуриеровата трансформация. Сега е удобно да предположим, че търсеното решение има непрекъснати производни до втори ред включително в цялата равнина $\mathbf{R}^2$ и (заедно с производните си) удовлетворява в $\mathbf{R}^2$ неравенствата (29), в които, разбира се, променливата y е заменена с променливата t.

Да допуснем, че при изброените предположения u е търсеното решение на задачата (37), (38). Като положим

$$v(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(x, t)\, dt$$

(т. е. правим трансформация на Фурие спрямо x при фиксирано t), стигаме до уравнението

$$v_{tt}(\xi, t) + a^2 \xi^2 v(\xi, t) = 0, \tag{39}$$

което се решава моментално. Получаваме

$$v(\xi, t) = A(\xi) \cos a\xi t + B(\xi) \sin a\xi t \tag{40}$$

и последователно намираме

$$A(\xi) = v(\xi, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(x, 0)\, dx = \widehat{\varphi}_0(\xi), \quad a\xi B(\xi) = v_t(\xi, 0) = \widehat{\varphi}_1(\xi),$$

т. е.

$$v(\xi, t) = \widehat{\varphi}_0(\xi) \cos a\xi t + \widehat{\varphi}_1(\xi) \frac{\sin a\xi t}{a\xi}. \tag{41}$$

За да можем да преработим (41), ще предположим допълнително, че $\widehat{\varphi}_0$ и $\widehat{\varphi}_1$ принадлежат на $L^1(\mathbf{R})$. В такъв случай, като използваме формулата за обръщане, намираме

$$u(x, t) = F^{-1}(v)(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t), \tag{42}$$

където сме положили за краткост

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \widehat{\varphi}_0(\xi) \cos at\xi d\xi,$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \widehat{\varphi}_1(\xi) \frac{\sin a t\xi}{a\xi} d\xi.$$

Сега вече сме близо до формулата на Даламбер. Очевидно

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}_0(\xi) \frac{e^{iat\xi} + e^{-iat\xi}}{2} e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x+at)\xi} \widehat{\varphi}_0(\xi)\, d\xi$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-at)\xi} \widehat{\varphi}_0(\xi)\, d\xi = \frac{\varphi_0(x+at) + \varphi_0(x-at)}{2}.$$

Накрая, като вземем предвид равенствата

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin a t \xi}{a\xi} \right) \widehat{\varphi}_1(\xi)\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \widehat{\varphi}_1(\xi) \cos at\xi\, d\xi = \frac{\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)}{2}$$

(Обосновете диференцирането под знака на интеграла!) и тъждеството $u_2(x, 0) \equiv 0$, което ни дава самата дефиниция на u_2, получаваме

$$u_2(x, t) = \int_0^t \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, s)\, ds = \int_0^t \frac{\varphi_1(x+as) + \varphi_1(x-as)}{2}\, ds = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(\lambda)\, d\lambda.$$

Остава ни да заместим в (42), за да получим класическата формула на Даламбер

$$u(x, t) = \frac{\varphi_0(x+at) + \varphi_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(\lambda)\, d\lambda. \tag{43}$$

Непосредствено се проверява, че ако $\varphi_0 \in C^2(\mathbf{R})$, $\varphi_1 \in C^1(\mathbf{R})$, равенството (43) дава решение на задачата (37), (38), което принадлежи на $C^2(\mathbf{R}^2)$. И сега неравенствата (29) се оказаха излишни.

Заключителни бележки. Според основното тъждество (12) трансформацията на Фурие превръща диференцирането в умножение с независимата променлива, т. е. тя опростява диференциалните уравнения. Това обстоятелство прави трансформацията на Фурие и нейната модификация — трансформацията на Лаплас, основни инструменти за изследване на линейните диференциални уравнения. Разбира се, в общия случай основната роля се отрежда на многомерния вариант на фуриеровата трансформация, който се въвежда със следващата дефиниция.

Дефиниция 4. *Да положим* $(x, \xi) = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$, *където* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *са точки от* $\mathbf{R}^n$. *Нека* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}^n$, $n \geqq 1$, *е функция, за която несобственият интеграл* $\int_{\mathbf{R}^n} e^{-i(x,\xi)} f(x)\, dx$ *съществува. В такъв случай функцията*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i(x,\xi)} f(x)\, dx \tag{44}$$

се нарича трансформация на Фурие на функцията f.

В случая формулата за обръщане взема вида

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i(x,\xi)} \widehat{f}(\xi)\, d\xi \tag{45}$$

и е в сила почти навсякъде в $\mathbf{R}^n$, стига f и $\widehat{f}$ да се съдържат в $L^1(\mathbf{R}^n)$. По същество доказателството остава същото. Сега обаче е целесъобразно да дефинираме $L_s(\mathbf{R}^n)$ като пространството на крайните линейни комбинации от характеристични функции на паралелепипеди в $\mathbf{R}^n$ със страни, успоредни на координатните оси.