О П Р Е Д Е Л Е Н И И Н Т Е Г Р А Л И
(кратък вариант)

0.1. Уводни бележки.

а) Интеграли и лица на фигури.

Класическият въпрос за пресмятане лицата („квадратурите”) на равнинни фигури с по-сложен контур е причината за появата и развитието на понятието „определен интеграл”. Един характерен клас такива фигури са тези от типа „криволинеен трапец”. За напредъка в отговора на въпроса се оказва достатъчно да можем да пресмятаме лице на криволинеен трапец с единствено „криволинейно” бедро, представляващо графика на функция. Такъв един трапец можем лесно да построим по следния начин. Нека $y = f(x)$ е дадена функция, дефинирана и непрекъсната в крайния и затворен интервал $a \le x \le b$. Върховете на нашия трапец ще са точките $A(a,0)$, $B(b,0)$, $C(b, f(b))$, $D(a, f(a))$ (направете чертеж !). Частта от графиката на функцията $f(x)$, кривата $\Gamma_f = \{(x, y) : x \in [a,b], y = f(x)\}$, която свързва върховете D и C, ще означим за удобство с $\overset{\cup}{CD}$. За простота ще считаме, че $0 < f(a) < f(b)$ и кривата $\overset{\cup}{CD}$ лежи изцяло над абсцисната ос. Ролята на основи на трапеца (съответно малка и голяма) играят вертикалните отсечки AD и BC. Отсечката AB (от абсцисната ос) е едното бедро, а кривата $\overset{\cup}{CD}$ е другото. Въпросът, който ни интересува е как да пресметнем лицето на „трапеца” $AB\overset{\cup}{CD}$? (Допълнителен коментар в тази насока е даден в т. **3 б)**, по-долу.)

За решаването на въпроса исторически известни са два подхода – на Риман (Георг Фридрих Риман, 1826 – 1866, немски математик) и Дарбу (Жан Гастон Дарбу, 1842 – 1917, френски математик). Изходните идеи и в двата подхода произтичат от аналогията с квадратурата (лицето) на кръга – като обща граница на редици от лица на вписани и описани фигури с по-проста геометрия (правилни n-тоъгълници).

б) Дефинициите на Риман и Дарбу.

Римановата дефиниция на определен интеграл (като величина със смисъл на лице на „трапец” като $AB\overset{\cup}{CD}$) си служи с крайни суми от вида:

$$\sigma_n[f] = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) . \tag{0.1}$$

В горния израз са използвани две системи от точки от интервала $[a,b]$: $\{x_i\}, i = 0,1,2,\dots,n$ и $\{\xi_k\}, k = 1,2,\dots,n$, като $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, а за системата от ξ-точките имаме, че $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall\, i = 1 \div n$ (т.е. $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$). Системата точки $\{x_i\}$ (делящи интервала $[a,b]$ на съседни подинтервали $[x_{i-1}, x_i]$) можем да наричаме система „опорни възли”, а точките $\{\xi_k\}$ – междинни точки („възли”). Ако направим чертеж на „трапеца” $AB\overset{\cup}{CD}$ и върху същия чертеж нанесем в интервала $[a,b]$ точките $\{x_i\}$ и междинните ξ-точки, непосредствено се вижда, че величината $\sigma_n[f]$ е всъщност сумата от лицата на съседни (долепени един до друг) правоъгълници: в частност k-тият от тях има дължина на основата $x_k - x_{k-1}$ и височина $= f(\xi_k)$, т.е. лицето му е равно на $(x_k - x_{k-1})f(\xi_k)$. С други думи, ако наречем „риманов полигон” фигурата, съставена от долепените правоъгълници, числото $\sigma_n[f]$ е стойността на лицето на полигона. Сумите $\sigma_n[f]$ обикновено се наричат риманови интегрални суми.

Да означим с $\Delta_n^{\max}$ максималната от дължините $|x_i - x_{i-1}|, i = 1 \div n$ (на подинтервалите $[x_{i-1}, x_i]$). В конструкциите на Риман и Дарбу се имат предвид всевъзможни системи от опорни възли $\{x_i\}$, удовлетворяващи естесвеното предположение, че, при $n \to \infty$, дължините на споменатите подинтервали клонят към нула, т.е.:

$$\Delta_n^{\max} \to 0 \ (n \to \infty). \tag{0.2}$$

<u>*Дефиницията на Риман*</u> можем да формулираме по следния начин. Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана в интервала $[a,b]$. Ще казваме, че $f(x)$ е интегруема или, че притежава определен интеграл (в смисъл на Риман), в интервала $[a,b]$, ако:

(i) Всички безкрайни редици $\{\sigma_n[f]\}$ са сходящи (при $n \to \infty$) и клонят към една и съща граница; т.е. $\exists$ число I : $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n[f] = I$, $\forall$ редица $\{\sigma_n[f]\}$.

(ii) Сходимостта на редиците $\{\sigma_n[f]\}$ не зависи от междинните възли $\{\xi_k\}$, в следния смисъл. За всяко (в т.ч. произволно малко) число $\varepsilon > 0$ $\exists$ положително число δ (изобщо зависещо от ε, т.е. $\delta = \delta(\varepsilon)$), така че неравенството $|\sigma_n[f] - I| < \varepsilon$ е изпълнено за всички n : $\Delta_n^{\max} < \delta$, за всяка редица $\{\sigma_n[f]\}$ и произволна система междинни възли $\{\xi_k\}$.

В такъв случай числото I наричаме *определен (риманов) интеграл на функцията* $f(x)$ и вместо с I си служим с означението $\int\limits_a^b f(x)dx$; числата a и b наричаме съответно долна и горна интеграционна граница. (Последния символ четем като „определен интеграл, в граници от a до b, от/на функцията $f(x)$.)

Ограниченост на интегруемите (по Риман) функции. Оказва се, че, ако една функция $f(x)$ е интегруема по Риман, в даден интервал $[a,b]$, тя е ограничена (за $x \in [a,b]$). Доказателството (което не е сложно) на това твърдение, може да се види например в учебника на проф. Тагамлицки /1) Я. Тагамлицки, Интегрално смятане, изд. Наука и изкуство, София, 1967 /.

В конструкцията на Дарбу се предполага, че разглежданите функции са *ограничени* ($x \in [a,b]$) и се използват съвместно две фамилии интегрални суми, сходни с римановите, като вместо $f(\xi_i)$ участват величините $m_i = \inf f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]$ или $M_i = \sup f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$s_n[f] = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \ S_n[f] = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}). \tag{0.3}$$

Сумите $s_n[f]$, $S_n[f]$ се наричат съответно малка и голяма (интегрална) сума на Дарбу. (За удобство, на числата m_i, M_i можем да гледаме съответно като на $\min f(x)$ и $\max f(x)$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$; да припомним, че – от теоремата на Вайерщрас – когато $f(x)$ е непрекъсната функция, за $x \in [a,b]$, валидни са равенствата $\inf f(x) = \min f(x)$ и $\sup f(x) = \max f(x)$.) Не е трудно да съобразим (вж. напр.

учебника [1]), че всяка безкрайна редица от малки суми $\{s_n[f]\}$ е монотонно растяща, ако всеки неин член е сума, със система опорни възли, включваща системите на членовете с по-малък номер. (Последното означава, че системата възли на сумата $s_{k+1}[f]$ включва всички опорни възли на сумата $s_k[f]$, $\forall\ k = 1, 2, 3, \dots$.) При същите обстоятелства, всяка редица от големи суми $\{S_n[f]\}$ е монотонно намаляваща. От тук се стига, сравнително просто (вж. [1]), до заключението, че, сравнявайки коя да е малка сума s със произволна голяма сума S, ще е изпълнено неравенството:

(0.4) $$s \le S.$$

(Наистина, произволна двойка величини s и S са суми от вида $s = s_l$ и $S = S_m$, където $l+1$ е броят на опорните възли на s /съответно $m+1$ са възлите на S/. Като обединим двете системи възли и „сгъстим” допълнително това обединение, поставяйки „нови” възли между „старите”, ще получим система от $N+1$ възела, такава че $l+m+1 < N$, а възлите на s и S са част от тази система. Тогава от споменатите по-горе видове монотонност – при редици от малки и големи суми – виждаме, че $s_l \le s_N$ и $S_N \le S_m$; същевременно: $s_N \le S_N$ – очевидно, понеже $m_N \le M_N$. Т.е. имаме, че: $s = s_l \le s_N \le S_N \le S_m = S$, значи $s \le S$.) Ако S^0 е произволна фиксирана стойност на големите суми S, неравенството $s \le S^0$, валидно за всяка малка сума s, означава, че множеството на малките суми е ограничено отгоре; тогава от принципа за непрекъснатост (вж. лекцията за безкрайни числови редици) следва, че $\exists$ число $I_* = \sup\{$*Множеството на сумите* $s\}$, $s \le I_* \le S^0, \forall$ малка сума s. Но S^0 беше произволна измежду големите суми на Дарбу, значи $I_* \le S, \forall$ голяма сума S; т.е. множеството на големите суми е ограничено отдолу и (от принципа за непрекъснатост) – $\exists$ число $I^* = \inf\{$*Множеството на сумите* $S\}$, $I_* \le I^* \le S$, $\forall$ голяма сума S. Заедно с предходното неравенство $s \le I_*$ така получаваме, че $s \le I_* \le I^* \le S$, за всички малки и големи суми на Дарбу. Числата I_* и I^* наричаме съответно *долен и горен интеграл на Дарбу*. За тях е в сила следното твърдение.

Теорема на Дарбу.

Нека $f(x)$ е функция, дефинирана и ограничена в интервала $[a,b]$. При условието (0.2), всички редици от малки суми $\{s_n[f]\}$, както и всички редици от големи суми $\{S_n[f]\}$, са сходящи и клонят (при $n \to \infty$) съответно към I_* и I^*; т.е. :

(0.5) $$\lim_{n\to\infty} s_n[f] = I_*;\ \lim_{n\to\infty} S_n[f] = I^*.$$

(*Доказателството* на това твърдение може да се види в учебника [1].)

Дефиниция на Дарбу. Ако $f(x)$ е функция, дефинирана и ограничена в интервала $[a,b]$, ще казваме, че тя е интегруема (или, че притежава определен интеграл) в интервала $[a,b]$, ако е изпълнено равенството $I_* = I^*$; общата стойност $I = I_* = I^*$ ще означаваме също с $\int_a^b f(x)dx$.

Предвид (0.5), очевидно ако функцията $f(x)$ е интегруема (в смисъл на Дарбу), интегралът е обща граница на двата вида редици от интегрални суми:

(0.6) $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} s_n[f] = \lim_{n\to\infty} S_n[f]\,.$$

в) Еквивалентност и разширение на дефинициите.

Еквивалентност. Двете дефиниции – на Риман и Дарбу – се оказват еквивалентни, в следния смисъл. Ако $f(x)$ е интегруема по Риман функция (в даден интервал $[a,b]$), тя е – като следствие – ограничена (както вече отбелязахме) и освен това – интегруема в смисъл на Дарбу, при което интегралите $\int_a^b f(x)dx$ [по Риман] и $\int_a^b f(x)dx$ [по Дарбу] са равни. И обратно, ако $f(x)$ е огранична функция, интегруема по Дарбу, тя е интегруема и по Риман (и двата интеграла имат една и съща стойност). Доказателството, че от интегруемост по Дарбу следва инегруемост и по Риман, е на практика очевидно, предвид неравенствата $m_i \le f(\xi_i) \le M_i,\ i = 1,2,\dots,n$; като умножим почленно неравенствата с $x_i - x_{i-1}$ и сумираме по i (от $i=1$ до $i=n$), намираме, че $s_n[f] \le \sigma_n[f] \le S_n[f]$, а от тук, предвид (0.6), при $n\to\infty$, стигаме до желаното заключение. Доказателството в обратната посока (от „Риман" към „Дарбу") е незначително по-трудоемко; тук ще пропуснем подробностите, които могат да се видят в учебника [1].

Разширения на дефинициите. Най-напред ще отбележим, че ако номерираме възлите на всевъзможните системи $\{x_i\}$ от дясно на ляво, т.е. $a = x_n < x_{n-1} < x_{n-2} < \cdots < x_1 < x_0 = b$, и повторим конструкцията на Дарбу (за дадена ограничена в интервала $[a,b]$ функция $f(x)$), ще получим дефиниция (по Дарбу) за определен интеграл $\int_b^a f(x)dx$ – този път интегрирането е от b до a. Аналогична дефиниция на интеграл $\int_b^a f(x)dx$ и в смисъл на Риман можем да получим, номерирайки от дясно на ляво и системите от междинни точки $\{\xi_i\}$. Ако едно и също множество от опорни x-възли веднъж номерираме от ляво на дясно, а после го преномерираме от дясно на ляво, непосредствено се вижда, например за големите суми на Дарбу, следното. Нека $S^f\big|_a^b$ е голямата сума, определена от системата x-възли при номерирането на дясно, а $S^f\big|_b^a$ – голямата сума, която получаваме от същите възли, при номерирането на ляво. Ако едно от събираемите в $S^f\big|_a^b$ е например $M_i(x_i - x_{i-1})$, участващите в него точки x_{i-1}, x_i и числото M_i , при преномерирането са записани сътветно като x_k, x_{k-1} и M_k (където $k = n - i$) и участват в $S^f\big|_b^a$ посредством събираемото $M_k(x_k - x_{k-1})$; но $M_k = M_i$, а $x_k - x_{k-1} = x_{i-1} - x_i = -(x_i - x_{i-1})$, значи $S^f\big|_b^a = -S^f\big|_a^b$, откъдето (след граничен преход, $n\to\infty$) следва, че $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$. Чрез последния коментар всъщност се убеждаваме, че е в сила *твърдението:* ако за дадена функция $f(x)$ съществува интегралът $\int_a^b f(x)dx$, то съществува и $\int_b^a f(x)dx$, при което еизпълнено равенството $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Предвид геометричния смисъл на определения интеграл – като лице на фигура, разположена между вертикалите $x = a$ и $x = b$, интуитивно е видимо, че когато $b \approx a$, лицето ще е приблизително нула. По тази причина е естесвено следното допълнение към дефиницията за определен интеграл (позволяващо да „интегрираме" между съвпадащи интеграционни граници). За произволна т. $c \in [a,b]$, *по дефиниция* имаме: $\int_c^c f(x)dx = 0$.

г) Основни случаи на интегруеми функции.

Посредством следните класове от функции, с най-масова употреба във всевъзможни приложения, отговаряме на естествения въпрос дали има „достатъчно много" функции, притежаващи определен интеграл.

(I) Всички непрекъснати функции в даден интервал $[a,b]$ са интегруеми.

(II) Всички функции, имащи краен брой точки на прекъсване в интервала $[a,b]$, са интегруеми в този интервал.

(III) Всички монотонни функции в интервала $[a,b]$ са интегруеми в него.

Коментар. 1) Ясно е, че можем да имаме монотонни функции, имащи безкрайно много точки на прекъсване в интервала $[a,b]$. 2) Доказателствата на горните твърдения (чието разбиране не изисква никакви извънредни способности) могат да се намерят например в учебника [1].

1. Начални основни свойства.

Естествената първа двойка свойства са тези, които показват, че операцията "интегриране" е *линейна*, което, заедно с очевидния факт, че тривиалната функция $f(x) \equiv 0$ е интегруема (в смисъл на Риман) във всеки интервал $[a,b]$, означава, че множеството на интегруемите в даден интервал $[a,b]$ функции е *линейно пространство*. Тези свойства разглеждаме в първото твърдение по-долу.

Твърдение 1. За функциите, интегруеми в даден интервал $[a,b]$ е в сила следното:

а) За всяка интегруема функция $f(x)$ и всяко число ***c***, функцията $cf(x)$ е също интегруема (в $[a,b]$) и е изпълнено равенството:

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx;$$

б) Ако $f_1(x), f_2(x)$ са интегруеми функции, то и сумата им $f_1(x)+f_2(x)$ е интегруема и е в сила равенството:

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx\,.$$

Забележка. За нашите цели е достатъчно да се ограничим с използването на това и следващите по-долу твърдения от т. **1** *без доказателства*.

Твърдение 2 (Интегруемост в подинтервали, адитивност). Една функция $f(x)$, дефинирана в интервала $[a,b]$ е тогава и само тогава интегруема в този интервал, когато е интегруема във всеки негов (затворен) подинтервал. Освен това, ако $f(x)$ е интегруема в $[a,b]$ и т. $c \in [a,b]$ е произволна вътрешна точка, в сила е следното равенство (*адитивност*):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{1.1}$$

Забележка. Свойството *адитивност* е в сила и в следния по-общ вариант: Ако $x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$ е произволна тройка числа (от интервала $[a,b]$), независимо от посоката на неравенствата помежду им (като някои от тях могат и да съвпадат) и $f(x)$ е интегруема в $[a,b]$, в сила е равенството:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_3} f(x)\,dx. \tag{1.2}$$

За да се убедим във валидността на (1.2), ще имаме предвид, че щом $f(x)$ е интегруема в $[a,b]$, тя е интегруема и във всеки (затворен) подинтервал на $[a,b]$ и за всяка двойка числа $t_1, t_2 \in [a,b]$ от разширението на дефиницията за интегруемост имаме, че $\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx = -\int_{t_2}^{t_1} f(x)\,dx$; освен това ще имаме предвид и че по дефиниция : $\int_{t_0}^{t_0} f(x)\,dx = 0$, за всяка т. $t_0 \in [a,b]$. Нека например $x_1 \le x_3 < x_2$. Ако $x_1 = x_3$, то $\int_{x_1}^{x_3} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_1} f(x)\,dx = 0$, равенството (1.1) добива вида

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_1} f(x)\,dx = 0$$

и е очевидно в сила (понеже, както вече отбелязахме: $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = -\int_{x_2}^{x_1} f(x)\,dx$). Когато $x_1 < x_3$, за интервала $[x_1, x_2]$ прилагаме (1.1): $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_3} f(x)\,dx + \int_{x_3}^{x_2} f(x)\,dx$, т.е. $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx - \int_{x_3}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_3} f(x)\,dx$, kоето всъщност е желаното (1.2) (предвид че $\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx = -\int_{x_3}^{x_2} f(x)\,dx$).

Твърдение 3 (Интегриране на неравенства). Ако $f(x)$ и $g(x)$ са функции, дефинирани и интегруеми в интервала $[a,b]$, и удовлетворяват в този интервал неравенството $f(x) \le g(x)$ $(\forall x \in [a,b])$ то и за интегралите им е изпълнено неравенство в същата посока:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx. \tag{1.3}$$

Твърдение 4 (Интегруемост по абсолютна стойност). Ако ***f(x)*** е интегруема функция в даден интервал $[a,b]$, то и функцията ***|f(x)|*** (със стойности – абсолютните стойности на ***f***) е интегруема в този интервал, при което е изпълнено следното ***неравенство на триъгълника*** (интегрална форма):

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{1.4}$$

Самото неравенство (на триъгълника) лесно може да се докаже по следния начин. Интегрираме почленно, съгласно *Твърдение 3,* всяко от очевидните неравенства $f(x) \le |f(x)|$ и $-f(x) \le |f(x)|$, валидни $\forall x \in [a,b]$, откъдето получаваме, че

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx \text{ и } -\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

т.е. в сила е (1.4).

Забележка. За произволна двойка числа $x_1, x_2 \in [a,b]$, независимо кое е по-голямото, от (1.4) непосредствено стигаме до следната по-обща форма на неравенството на триъгълника:

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| \le \left|\int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx\right|. \tag{1.5}$$

Наистина, ако например $x_1 > x_2$, прилагайки (1.4) за интервала $[x_2, x_1]$, имаме, че

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{x_2}^{x_1} f(x)\,dx\right| \le \int_{x_2}^{x_1} |f(x)|\,dx = \left|\int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx\right|.$$

2. Интегрална теорема за средните стойности.

Тук ще разгледаме едно следствие (и аналог) на известната *Теорема на Болцано за междинните стойности* на непрекъснатите функции.

Твърдение (Теорема за средните стойности). Ако $f(x)$ и $\varphi(x)$ са непрекъснати функции в интервала $[a,b]$ като $\varphi(x)$ не си мени знака в този интервал, в смисъл че или $\varphi(x)\geq 0$, или $\varphi(x)\leq 0$, $\forall x\in[a,b]$, то съществува такава т. $\xi\in[a,b]$, за която е изпълнено равенството:

$$(2.1)\qquad \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi).\int_a^b \varphi(x)\,dx\ .$$

За да докажем твърдението, да означим с ***M*** и ***m*** съответно максимума и минимума на $f(x)$ в интервала $[a,b]$; съгласно известната *Теорема на Вайерщрас* (за непрекъснати функции) величините ***M*** и ***m*** са в частност две (екстремални) стойности на функцията $f(x)$ (за интервала $[a,b]$). За $f(x)$ е в сила неравенството:

$$(2.2)\qquad m\leq f(x)\leq M,\ x\in[a,b]$$

Нека например $\varphi(x)\leq 0$, $\forall x\in[a,b]$. Умножавайки почленно (2.2) с $\varphi(x)$, имаме че $m\varphi(x)\geq f(x)\varphi(x)\geq M\varphi(x),\ x\in[a,b]$, след което интегрираме почленно последната двойка неравенства (съгласно *Твърдение 3*) и получаваме:

$$(2.3)\qquad m.\int_a^b \varphi(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \geq M.\int_a^b \varphi(x)\,dx\ .$$

В последната двойка неравенства множителят $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ е неположителна величина (от предположението $\varphi(x)\leq 0$, $\forall x\in[a,b]$). Наистина, всяка Риманова интегрална сума за функцията $\varphi(x)$ е всъщност сума от неположителни числа, а интересуващият ни интеграл (от $\varphi(x)$) е граница на Риманови интегрални суми; тогава, след граничнен преход ($n\to\infty$) в неравенства от вида $\sigma_n\leq 0$, се убеждаваме, че споменатият интеграл е ≤ 0. Ако $\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$, от (2.3) е ясно, че и $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$ е нула и (2.1) ще е изпълнено за всяка т. ξ от интервала $[a,b]$. Когато $\int_a^b \varphi(x)\,dx < 0$, почленно делим в неравенствата (2.3) на числото $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ и получаваме следното:

$$(2.4)\qquad m\ \leq\ \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx}\ \leq\ M\ .$$

Но частното на двата интеграла в (2.4) е едно число λ между стойностите ***m*** и ***M*** на функцията $f(x)$; тогава от споменатата теорема на Болцано (за междинните стойности) следва, че съществува поне една т. $\xi \in [a,b]$, такава че $f(\xi) = \lambda$, т.е.

$$f(\xi) = \frac{\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx}$$, с което доказателството на теоремата е завършено.

Случаят $\varphi(x) \geq 0$ се изследва аналогично, но е малко по-прост, предвид че при почленното умножаване на изходните неравенства (2.2) (и на следващите) не се обръща посоката на съответните неравенства.

Забележка. Теоремата за средните стойности е в сила и без изискването $\varphi(x)$ да бъде непрекъсната функция (достатъчно е да бъде интегруема).

3. Интеграли с променлива (подвижна) граница – теорема на Нютон-Лайбниц.

Ако функцията $f(x)$ е дефинирана и интегруема в интервала $[a,b]$ и x_0 е някаква фиксирана точка (число) от този интервал, ще разглеждаме интеграли от вида $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, където $x \in [a,b]$ е произволно (фиксирано) число от интервала. Ясно е, че съпоставяйки на всяко $x \in [a,b]$ стойността на интеграла $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, получаваме всъщност една нова функция $F(x)$, дефинирана (за всяко $\boldsymbol{x}$) в интервала $[a,b]$, $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$. Първите два въпроса, естествено възникващи за функцията $F(x)$, са дали е непрекъсната и дали е диференцируема. Последователно ще се спрем на всеки от тях.

а). *Непрекъснатост на функцията* $F(x)$.

Твърдение. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a,b]$, функцията $F(x)$ е непрекъсната в този интервал.

Доказателство. За произволна стойност на аргумента $x \in [a,b]$ ще дадем нарастване ***h***, така че $x + h \in [a,b]$ и ще разгледаме нарастването $F(x+h) - F(x)$. Предвид дефиницията за непрекъснатост, достатъчно е да установим, че $F(x+h) - F(x) \to 0$, когато $h \to 0$. За целта посредством дефиниционната формула $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ интересуващото ни нарастване преработваме по следния начин:

$$F(x+h) - F(x) = \int\limits_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int\limits_{x}^{x+h} f(t)\,dt\,;$$

използвали сме свойството *адитивност* на определените интеграли. Сега от *неравенството на триъгълника* имаме:

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int\limits_{x}^{x+h} f(t)\,dt \right| \leq \left| \int\limits_{x}^{x+h} |f(t)|\,dt \right|.$$

Тъй като функцията $f(x)$ е ограничена (за $x \in [a,b]$), съществува (неотрицателна) константа ***C***, така че $|f(t)| \le C, \forall t \in [a,b]$. Последното неравенство интегрираме почленно в граници от ***x*** до ***x+h***; ако например $h < 0$ (тогава $x + h < x$), съгласно свойството за *почленно интегриране на неравенства* получаваме:

$$\left| \int_x^{x+h} |f(t)|\, dt \right| = \int_{x+h}^{x} |f(t)|\, dt \le \int_{x+h}^{x} C\, dt = C.\int_{x+h}^{x} dt = C(x-(x+h)) = C\,|h|,$$

т.е., като следствие от неравенството $|f(t)| \le C$, имаме, че $\left| \int_x^{x+h} f(t)\, dt \right| \le C\,|h|$. От тук и вече полученото за $|F(x+h) - F(x)|$ (по-горе), установяваме следното:

$$|F(x+h) - F(x)| \le \left| \int_x^{x+h} |f(t)|\, dt \right| \le C\,|h|;$$

т.е. за интересуващото ни нарастване на функцията $F(x)$ е в сила двойното неравенство

$$(3.1) \qquad 0 \le |F(x+h) - F(x)| \le C\,|h|.$$

В (3.1) ***x*** е фиксикрано и участващите величини разглеждаме като функции на ***h***; при $h \to 0$, съгласно известното правило за граничен преход в неравенства между функции, от (3.1) заключаваме, че $F(x+h) - F(x) \to 0$ ($h \to 0$). Т.е. функцията ***F*** е непрекъсната в т. ***x***, която обаче беше произволно фиксирана в интервала $[a,b]$, значи ***F*** е непрекъсната в интервала (което имахме да докажем).

б). *Диференцируемост на* $F(x)$ – *теорема на Нютон-Лайбниц.*

Най-напред нека отбележим, че ако съществува производната $F'(x)$, естествено е да очакваме, че $F'(x) = f(x)$. Това всъщност е една класически възникнала догадка – по повод на т.н. *проблем за квадратурите* (т.е. – за лицата на равнинни фигури, оградени от графики на функции). Ако например $f(t) > 0, \forall t \in [a,b]$, $x > x_0$ и $h > 0$, от геометричния смисъл на определените интеграли е ясно, че $F(x)$ -- това е лицето на фигурата (от типа "криволинеен трапец"), разположена между вертикалните прави $t = x_0$ и $t = x$, оградена отгоре от графиката на функцията $y = f(t), x_0 \le t \le x$, а отдолу – от отсечката (от абсцисната ос) $y = 0, x_0 \le t \le x$; $F(x+h) - F(x)$ – това е нарастването на гореописаната площ, когато променливата ***x*** е получила изменение (нарастване) със стойност ***h*** – до нова стойност ***x+h***. Ако означим за удобство с T^0 криволинейния трапец с лице $F(x)$ (описан по-горе), ясно е, че $F(x+h) - F(x)$ е също лице на такъв трапец – да го означим с ΔT^0, "долепен" до трапеца T^0. При това обединението $T^* = T^0 \bigcup \Delta T^0$ е криволинейният трапец, аналогичен на T^0, с лице $F(x+h)$. С други думи, ΔT^0 е нарастването на трапеца T^0 до новото "състояние" T^*. Трапецът ΔT^0 става "безкрайно" тесен, когато ***h*** е "почти" ***0***; тогава неговото лице става "несъществено" различно от лицето на вписания в (или описан около) него правоъгълник с основа отсечката $y = 0, x_0 \le t \le x$ и височина ***f(x)***. Понеже лицето на правоъгълника е ***h.f(x)***, от така изложените интуитивни съображения заключаваме, че $F(x+h)-F(x)\approx h.f(x)$; тогава $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}\approx f(x), \Rightarrow \exists F'(x)=f(x)$ (предвид че, от "практическа" гледна точка $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}\approx F'(x)$, когато $F'(x)$ съществува). Коментираната по-горе догадка получава своето строго потвърждение именно чрез теоремата на Нютон-Лайбниц, която ще разгледаме в традиционната й по-обща форма:

Твърдение (Нютон-Лайбниц). Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a,b]$ и е непрекъсната в дадена т. $x=\xi$ от този интервал, тогава функцията $F(x)$ е диференцируема в тази точка и за производната й $F'(\xi)$ имаме, че $F'(\xi)=f(\xi)$.

Доказателство. Като имаме предвид дефиницията на производна, трябва да докажем, че диференчното частно $\dfrac{F(\xi+h)-F(\xi)}{h}$ има (крайна) граница, при $h\to 0\,(h\neq 0)$. За да установим едновременно с това дали тази граница е $f(\xi)$ (предвид коментираната по-горе хипотеза), ще изследваме разликата $\dfrac{F(\xi+h)-F(\xi)}{h}-f(\xi)$. От вече известните пресмятания за нарастването $F(x+h)-F(x)$ имаме, че $\dfrac{F(\xi+h)-F(\xi)}{h}=\dfrac{1}{h}.\int\limits_{\xi}^{\xi+h} f(x)\,dx$ и освен това $f(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{h}.\int\limits_{\xi}^{\xi+h} dx=\dfrac{1}{h}.\int\limits_{\xi}^{\xi+h} f(\xi)\,dx$.(В последното равенство сме използвали, че $\dfrac{1}{h}.\int\limits_{\xi}^{\xi+h} dx=1$ и че $f(\xi)$ е числов множител, който можем да внесем под знака на съответния интеграл.) Следователно

$$(3.2)\quad \left|\frac{F(\xi+h)-F(\xi)}{h}-f(\xi)\right|=\left|\frac{1}{h}.\int\limits_{\xi}^{\xi+h}[f(x)-f(\xi)]\,dx\right|\le\frac{1}{|h|}\left|\int\limits_{\xi}^{\xi+h}|f(x)-f(\xi)|\,dx\right|.$$

(Тук очевидно сме използвали свойството *линейност* на определените интеграли и *неравенството на триъгълника*.) Предположението за непрекъснатост на $f(x)$ в т. $x=\xi$ означава, че $\forall\varepsilon>0$ съществува число $\delta>0$, така че е в сила неравенството $|f(x)-f(\xi)|<\dfrac{\varepsilon}{2}, \forall x:|x-\xi|<\delta, x\in[a,b]$ (съгласно известната дефиниция на *Коши* за непрекъснатост на функция). Нататък е достатъчно да предполагаме, че $|h|<\delta$; тогава $|f(x)-f(\xi)|<\dfrac{\varepsilon}{2}, \forall x$ от интервала между точките ξ и $\xi+h$. Интергирайки последното неравенство в този интервал, получаваме:

$$\frac{1}{|h|}\left|\int\limits_{\xi}^{\xi+h}|f(x)-f(\xi)|\,dx\right|\le\frac{1}{|h|}\left|\int\limits_{\xi}^{\xi+h}\frac{\varepsilon}{2}\,dx\right|=\frac{\varepsilon}{2|h|}\left|\int\limits_{\xi}^{\xi+h}dx\right|=\frac{\varepsilon}{2|h|}.|h|=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

откъдето, предвид (3.2), следва:

$$(3.3)\qquad \left|\frac{F(\xi+h)-F(\xi)}{h}-f(\xi)\right|<\varepsilon, \forall h:|h|<\delta\ (h\neq 0, \xi+h\in[a,b]).$$

Понеже числото ε е произволно (малко), неравенството (3.3) означава (от дефиницията за производна -- във формата на *Коши*), че функцията $F(x)$ е диференцируема в т. ξ и $F'(\xi) = f(\xi)$ (което трябваше да се докаже).

Коментар. Следващите няколко твърдения илюстрират съществената практическа значимост на теоремата на Нютон-Лайбниц. Всяко от тях може да се разглежда като приложен вариант на основната тема. Това са основните

СЛЕДСТВИЯ ОТ ТЕОРЕМАТА НА НЮТОН-ЛАЙБНИЦ:

в). *Съществуване на неопределени интеграли от непрекъснати функции.*

От таблицата на неопределените интеграли знаем, че съществуват функции (такива са тъкмо познатите ни от таблицата *основни елементарни функции*), които притежават примитивни (т.е. неопределени интеграли). От гледна точка на основните (вече класически) идеи в развитието на математическия анализ е полезно да обърнем внимание на съществения (в т.ч. и за приложенията) по-общ въпрос – съществува ли достатъчно широк клас от функции, които имат примитивни.

Твърдение. Всяка непрекъсната в даден интервал Δ функция $f(x)$ притежава примитивна в този интервал.

Доказателство. Най-напред да отбележим, че интервалът Δ е произволен – краен или безкраен, отворен или затворен и пр. Ако фиксираме произволна т. $x_0 \in \Delta$, функцията $F(x) \equiv \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ е очевидно дефинирана за всяко $x \in \Delta$, предвид че интервалът $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$, когато $x < x_0$) е краен и затворен и се съдържа в Δ; следователно определеният интеграл $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ съществува (тъй като подинтегралната функция f е непрекъсната в $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$)). Сега оставяйки $\boldsymbol{x}$ да се мени в произволен подинтервал (краен и затворен) $[a,b] \subset \Delta$, съдържащ т. x_0, от теоремата на Нютон-Лайбниц имаме, че $F(x)$ притежава производна $\forall\, x \in \Delta$ и $F'(x) = f(x), x \in \Delta$. Т.е. функцията $F(x)$ е примитивна за $f(x)$ в интервала Δ.

Коментар. Ясно е, че ще получим цяла фамилия примитивни от вида $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, ако на x_0 гледаме като на параметър, който може да приема на свой ред произволни стойности от интервала Δ. Разнообразието от примитивни очевидно се разширява с прибавяне на произволни константи (т.е. функциите от вида $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C$, C – константа, също са примитивни за $f(x)$). От т.н. *основна теорема на интегралното смятане* (известна още като *критерий за константност*) знаем, че по този начин получаваме всъщност описание за всички възможни примитивни (в даден интервал) на дадена функция $f(x)$. Това допълнение на горния резултат разглеждаме по-долу като самостоятелно твърдение.

г). *Връзка между определени и неопределени интеграли.*

Въпросната връзка се изразява чрез популярната формула

(3.4) $$\int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C.$$

Тъкмо тази формула се среща понякога под името “теорема на Нютон-Лайбниц” (тя е всъщност практическата версия на теоремата). Формулата показва, че (за непрекъснати функции) всеки неопределен интеграл, с точност до *адитивна* (т.е. “добавъчна” – чрез действието *събиране*) константа, е определен интеграл с подвижна граница. Има се предвид следното

Твърдение. Ако $f(x)$ е непрекъсната функция в даден интервал Δ и $x_0 \in \Delta$ е произволна фиксирана т. от интервала, то всяка функция от вида $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C$, за всяка константа C, е примитивна за $f(x)$ (в Δ) и обратно – за всяка примитивна на $f(x)$ в Δ съществува константа C, така че е в сила (3.4).

Доказателството на твърдението фактически се съдържа в казаното по-горе. Наистина, в т.**в)** вече отбелязахме, че всяка функция $F_C \equiv \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C$ е примитивна за $f(x)$. Обратно, ако $\phi(x) \equiv \int f(x)\,dx$ е произволна примитивна на $f(x)$ в Δ, предвид че и функцията $F(x) \equiv \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ е такава, заключаваме по очевиден начин, че разликата $R(x) \equiv \phi(x) - F(x)$ е функция, чиято производна $R'(x)$ е *нула* в интервала Δ ($R'(x) = \phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$). Следователно, от *основната теорема на интегралното смятане*, $R(x)$ е константа в Δ, т.е. $R(x) \equiv C$ (в Δ) за някаква константа C, т.е. в сила е (3.4).

д). *Пресмятане на определени интеграли чрез неопределени.*

В пресмятането на определени интеграли с традиционния символ $G(x)\big|_a^b$ означаваме разликата (нарастването) $G(b) - G(a)$ -- за дадена функция $G(x)$, дефинирана в интервал, който съдържа числата a и b. Когато използваме това означение, можем да казваме, че *функцията $G(x)$ е пресметната (или взета) в граници от **a** до **b***.

Твърдение. Ако $f(x)$ е непрекъсната функция в интервала Δ, $x_1, x_2 \in \Delta$ са фиксирана двойка числа и $\phi(x)$ е произволна примитивна (неопределен интеграл) на $f(x)$ в Δ, в сила е следното равенство:

(3.5) $$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \phi(x)\Big|_{x_1}^{x_2}.$$

Доказателство. От (3.4) вече знаем, че $\phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C$, където $x_0 \in \Delta$ е някакво фиксирано число; тогава

$$\phi(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + C - [\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + C] = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx,$$

като сме взели предвид свойството *адитивност* на определените интеграли. С това правилото (3.5) е доказано.