Полиноми.

Нека A е комутативен пръстен с единица. Тогава пръстенът на полиномите с една променлива означаваме с $A[x]$. Ако K е поле, то пръстенът на полиномите $K[x]$ е област на главни идеали. Всеки полином $f \in A[x]$ се записва по единствен начин във вида

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

където $a_0 \neq 0$. Числото n се нарича степен на f и отбелязваме с $\deg f$. В случай, че $f \equiv 0$ е тъждествно нулевият полином, то дефинираме $\deg f = -\infty$. Събирането и умножението на два полинома $f, g \in A[x]$ става по стандартния начин. В сила е

$$\deg(f + g) \leq \max(\deg f, \deg g),$$

а ако A е област, то

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g.$$

Казваме, че полиномът f дели полинома g, ако съществува полином $q(x) \in A[x]$, такъв че $g(x) = q(x) \cdot f(x)$. Записваме $f \mid g$.

Нека $f, g \in K[x]$ са полиноми над поле K като $g(x) \neq 0$. Тогава е в сила следната

Теорема за деление с частно и остатък. *Съществуват единствени полиноми $q(x) \in K[x]$, наречен частно и $r(x) \in K[x]$, наречен остатък, такива че*

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

и $\deg r < \deg g$.

В примера от следващата задача ще стане ясно как точно се процедира при делението на полиноми. Аналогията на полиномиалния пръстен

$K[x]$ над поле K с пръстена на целите чилса $\mathbb{Z}$ продължава и с наличието на алгоритъм на Евклид за намиране на най-голям общ делител на два полинома. По същество той не се различава от алгоритъма на Евклид за намиране на най-голям делител на цели числа – единствената разлика е, че операциите се извършват с полиноми.

Задача 1. *Нека са дадени полиномите с рационални коефициенти*

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1, g(x) = x^3 - 2x + 3x - 4.$$

Пресметнете $f \pm g$, $f \cdot g$ *и* $g : f$.

Решение. Непосредствено пресмятаме, че

$$f(x) + g(x) = x^3 + x^2 + x - 3,$$

$$f(x) - g(x) = -x^3 + 5x^2 - 5x + 5,$$

$$f(x) \cdot g(x) = 3x^5 - 8x^4 + 14x^3 - 20x^2 + 3x - 4.$$

Да разгледаме подробно делението. На първата стъпка делим старшият член на полиномът-делимо x^3 със старшия член на полинома-делител $3x^2$. Записваме частното им $\frac{1}{3}x$ като старши член на полиномът-частно.

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^3 - 2x^2 \ + 3x \ - 4\big) : \big(3x^2 - 2x + 1\big) = \frac{1}{3}x \qquad + \overline{\qquad\qquad\qquad} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3x^2 - 2x + 1 \end{array}$$

Сега умножаваме така получения старши член на полинома-частно по полинома-делител и резултатния полином изваждаме от полинома-делимо.

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^3 - 2x^2 \ + 3x \ - 4\big) : \big(3x^2 - 2x + 1\big) = \frac{1}{3}x \qquad + \overline{\qquad\qquad\qquad} \\ \underline{-\,x^3 + \frac{2}{3}x^2 \ - \frac{1}{3}x} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3x^2 - 2x + 1 \\ \qquad\quad -\,\frac{4}{3}x^2 \ + \frac{8}{3}x \ - 4 \end{array}$$

Повтаряме същата процедура за разликата $-\frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 4$. Делим старшия му член $-\frac{4}{3}x^2$ на старшия член на полинома-делител $3x^2$ и получаваме следващият член от полинома-частно $-\frac{4}{9}$.

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^3 - 2x^2 \ + 3x \ - 4\big) : \big(3x^2 - 2x + 1\big) = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9} + \overline{\qquad\qquad\qquad} \\ \underline{-\,x^3 + \frac{2}{3}x^2 \ - \frac{1}{3}x} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3x^2 - 2x + 1 \\ \qquad\quad -\,\frac{4}{3}x^2 \ + \frac{8}{3}x \ - 4 \end{array}$$

Умножаваме $-\frac{4}{9}$ по полинома-делител и резултатния полином изваждаме отново от полинома, на който делихме.

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 2x^2 + 3x \;\; - 4\big) : \big(3x^2 - 2x + 1\big) = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9} + \dfrac{\quad}{3x^2 - 2x + 1}. \\
\underline{- x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x} \\
\qquad\quad - \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x \;\; - 4 \\
\qquad\quad \underline{\frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{9}x \;\; + \frac{4}{9}} \\
\qquad\qquad\qquad \frac{16}{9}x - \frac{32}{9}
\end{array}$$

Полиномът, който остана от полиномът-делимо е $\frac{16}{9}x - \frac{32}{9}$ и неговата степен е по-ниска от степента на полинома-делител. Следователно делението спира дотук и полиномът-остатък е именно $\frac{16}{9}x - \frac{32}{9}$.

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 2x^2 + 3x \;\; - 4\big) : \big(3x^2 - 2x + 1\big) = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9} + \dfrac{\frac{16}{9}x - \frac{32}{9}}{3x^2 - 2x + 1}. \\
\underline{- x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x} \\
\qquad\quad - \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x \;\; - 4 \\
\qquad\quad \underline{\frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{9}x \;\; + \frac{4}{9}} \\
\qquad\qquad\qquad \frac{16}{9}x - \frac{32}{9}
\end{array}$$

Следователно можем да запишем, че

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = \left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}\right)\big(3x^2 - 2x + 1\big) + \frac{16}{9}x - \frac{32}{9}.$$

□

Задача 2. *Разделете с частно и остатък полинома $f(x)$ на полинома $g(x)$ над $\mathbb{Q}$.*

1) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 4, g(x) = -2x^2 + 4x - 8,$

2) $f(x) = x^5 - 3x^2 + 2x^2 + x + 2, g(x) = x^3 - 3x + 1.$

Решение. 1)

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^4 - 2x^3 \qquad\quad + 2x \;\; - 4\big) : \big(-2x^2 + 4x - 8\big) = -\frac{1}{2}x^2 + 2 + \dfrac{-6x + 12}{-2x^2 + 4x - 8} \\
\underline{- x^4 + 2x^3 - 4x^2} \\
\qquad\qquad\quad - 4x^2 + 2x \;\; - 4 \\
\qquad\qquad\quad \underline{4x^2 - 8x + 16} \\
\qquad\qquad\qquad\quad - 6x + 12
\end{array}$$

2)

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^5 - 3x^3 + 2x^2 + x + 2\big) : \big(x^3 - 3x + 1\big) = x^2 + \dfrac{x^2 + x + 2}{x^3 - 3x + 1} \\
\underline{- x^5 + 3x^3 \;\; - x^2} \\
\qquad\qquad\qquad x^2
\end{array}$$

□

Задача 3. *Разделете* $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ *на* $g(x) = x^2 - 3x + 1$ *над* $\mathbb{Z}_5$.

Решение. В $\mathbb{Z}_5$ полиномите приведете във вида

$$\overline{f}(x) = \overline{2}x^4 - \overline{3}x^3 + \overline{4}x^2 - \overline{5}x + \overline{6} = \overline{2}x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{4}x^2 + \overline{1},$$

$$\overline{g}(x) = x^2 - \overline{3}x + \overline{1} = x^2 + \overline{2}x + \overline{1},$$

след което продължете по стандартния начин, използвайки таблицата за умножение в $\mathbb{Z}_5$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

за да извършите „делението“.
Отговор: $\overline{f}(x) = (x^2 + \overline{2}x + \overline{1}) \cdot \overline{g}(x)$. □

Задача 4. *Да се намери полиномът*

$$f(x) = x^3 + px + q \in \mathbb{Z}[x],$$

ако остатъкът му при деление с $x^2 + 3x - 2$ *е* $2x + 3$.

Решение. Нека частното от делението е полиномът $g(x)$. Т.к $\mathbb{Z}$ е област, то $\deg f = \deg g + \deg(x^2 + 3x - 2)$, откъдето намираме, че $\deg g = 1$. Тогава общият вид на частното е $g(x) = ax + b$ с цели числа $a, b \in \mathbb{Z}$. Така имаме

$$x^3 + px + q = (x^2 + 3x - 2)(ax + b) + 2x + 3$$

и по метода за сравняване на коефициентите веднага намираме, че $a = 1$ от старшия коефициент. Още, от сравняване на коефициентите пред x^2 имаме, че

$$0 = b - 3a,$$

което ни дава $b = 3$. Така получихме, че

$$x^3 + px + q = (x^2 + 3x - 2)(x + 3) + 2x + 3$$

и всичко се свежда до умножение и събиране на полиноми. $\square$

Задача 5. *Нека* $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$ *и* $g(x) = x^2 - x + 1$. *Намерете най-големият общ делител* $d(x) = (f(x), g(x))$ *и полиноми* $u(x)$ *и* $v(x)$, *такива че* $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$.

Решение. Алгоритъмът на Евклид и тъждеството на Безу, познати от пръстена на целите числа $\mathbb{Z}$ са в сила и за пръстена на полиномите над произволно поле. Първоначално прилагаме алгоритъма на Евклид:

$$\begin{array}{l}
\big(\quad 3x^3 - 2x^2 \quad + x + 2\big) : \big(x^2 - x + 1\big) = 3x + 1 + \dfrac{-x+1}{x^2 - x + 1} \\
\underline{-\,3x^3 + 3x^2 - 3x} \\
\qquad\qquad\quad x^2 - 2x + 2 \\
\qquad\quad \underline{-\,x^2 \quad + x - 1} \\
\qquad\qquad\qquad -\,x + 1
\end{array}$$

за да получим първото частно $q_1(x) = 3x + 1$ и първият остатък $r_1(x) = -x + 1$. Сега делим $g(x)$ на $r_1(x)$

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^2 - x + 1\big) : \big(-\,x + 1\big) = -\,x + \dfrac{1}{-x+1} \\
\underline{-\,x^2 + x}
\end{array}$$

за да получим второто частно $q_2(x) = -x$ и остатък $r_2(x) = 1$. Ясно е, че $r_2(x)$ е последният ненулев остатък, т.к. на следващата стъпка бихме получили остатък $r_3(x)$ с $\deg r_3 < \deg r_2 = 0$. И така $d(x) = r_2(x) = 1$ и полиномите са взаимно прости.

От пресмятанията в алгоритъма имаме равенствата

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x),$$

$$g(x) = q_2(x)r_1(x) + \boxed{r_2(x)}$$

и по познатия обратен ход пресмятаме

$$\boxed{r_2(x)} = g(x) - q_2(x)r_1(x) = g(x) - q_2(x)[f(x) - q_1(x)g(x)] =$$

$$= \underbrace{-q_2(x)}_{u(x)} f(x) + \underbrace{[1 + q_1(x)q_2(x)]}_{v(x)} g(x).$$

Непосредственото пресмятане дава, че

$$u(x) = x,$$

$$v(x) = 1 - 3x^2 - x.$$

$\square$

<u>Схема на Хорнер</u>
Нека е даден полинома

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

над някакво поле. Нека да го разделим с частно и остатък на полинома от първа степен $x - \alpha$, където α е елемент от полето. Тогава частното е полином от $n - 1$ степен и можем да запишем

$$a_0x^n + \cdots + a_n = (x - \alpha)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}) + b_n,$$

където остатъкът b_n е елемент от полето, понеже според теоремата за деление, неговата степен е или 0, или $-\infty$. Ясно е, че α е корен на $f(x)$ точно когато $b_n = f(\alpha) = 0$. От принципа за срявняване на коефициентите имаме

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0, \\ a_1 &= b_1 - \alpha b_0, \\ \cdots & \\ a_{n-1} &= b_{n-1} - \alpha b_{n-2}, \\ a_n &= b_n - \alpha b_{n-1}, \end{aligned}$$

откъдето всъщност изразяваме коефициентите b_i като

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0, \\ b_1 &= \alpha b_0 + a_1, \\ \cdots & \\ b_{n-1} &= \alpha b_{n-2} + a_{n-1}, \\ b_n &= \alpha b_{n-1} + a_n. \end{aligned}$$

Тези резултати обикновено се записват в таблица

	a_0	a_1	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
α	$b_0 = a_0$	$b_1 = \alpha b_0 + a_1$	$\ldots$	$b_{n-1} = \alpha b_{n-2} + a_{n-1}$	$b_n = \alpha b_{n-1} + a_n = f(\alpha)$

наречена схема на Хорнер. Ако решим да приложим схемата на Хорнер върху получения полином $b_0x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}$, то просто прилагаме същия метод, използвайки числата получени в предходния ред на таб-

лицата, за да попълним текущия ред.

Схемата на Хорнер е удобна, както за деление на полиноми (в случай, че делителят е от посочения вид), така и за търсене на корени на полином. Например, ако $f(x)$ е полином с цели коефициенти и $\alpha = \dfrac{p}{q}$ е негов рационален корен, записан като несъкратима обикновена дроб (т.е. $(p, q) = 1$), то имаме, че

$$a_0\frac{p^n}{q^n} + a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n = 0$$

и след като умножим двете страна с q^n, за да се освободим от знаменателя, имаме

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \cdots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0.$$

Оттук се вижда, че задължително $q \mid a_0p^n$ и $p \mid a_nq^n$, но понеже $(p, q) = 1$, то следва, че $q \mid a_0$ и $p \mid a_n$. Следователно рационалните корени на $f(x)$ търсим измежду дробите $\dfrac{p}{q}$, където p е делител на a_n, а q е делител на a_0. Ясно е, че ако $a_0 = 1$, то рационалните корени на $f(x)$ са цели числа.

Задача 6. *За полинома*

$$f(x) = 3x^5 - 4x^2 + 3x + 2$$

пресметнете $f(-1)$ *и разложете* $f(x)$ *по степените на* $x + 1$.

Решение. Ще използваме схемата на Хорнер.

	3	0	0	-4	3	2
-1	3	-3	3	-7	10	$\boxed{-8}$

което означава, че $f(-1) = -8$. Продължаваме по таблицата нататък

	3	0	0	-4	3	2
-1	3	-3	3	-7	10	$\boxed{-8}$
-1	3	-6	9	-16	$\boxed{26}$	
-1	3	-9	18	$\boxed{-34}$		
-1	3	-12	$\boxed{30}$			

-1	3	$\boxed{-15}$				
-1	$\boxed{3}$					

което ни дава разлагането

$$f(x) = \boxed{3}(x+1)^5\boxed{-15}(x+1)^4 + \boxed{30}(x+1)^3\boxed{-34}(x+1)^2 + \boxed{26}(x+1)\boxed{-8}.$$

□

Задача 7. *Намерете рационалните корени на полинома*

$$f(x) = 6x^4 + 23x^3 + 19x^2 - 8x - 4.$$

Упътване. Използвайте схемата на Хорнер. Рационалните корени на $f(x)$ имат вида $\frac{p}{q}$, където p е делител на -4, а q е делител на 6, такива че $(p, q) = 1$. Оттук следва, че трябва да проверим числата

$$\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm 2, \pm\frac{2}{3}, \pm 4, \pm\frac{4}{3}.$$

□

Задача 8. *За кои цели неотрицателни числа m, n, p полиномът $g(x) = x^2 + x + 1$ дели полинома $f(x) = x^{3m+2} + x^{3n+1} + x^{3p}$.*

Решение. Ще разгледаме полиномите по $\bmod g$. Имаме, че

$$x^2 + x + 1 \equiv 0 (\bmod g),$$

което води до следните сравнения:

$$1 \equiv -x^2 - x (\bmod g),$$

$$x \equiv -x^2 - 1 (\bmod g)$$

и

$$x^2 \equiv -x - 1 (\bmod g).$$

Умножаваме двете страни на последното сравнение с x, за да получим, че

$$x^3 \equiv -x^2 - x \equiv 1 (\bmod g).$$

Така вече виждаме, че

$$f(x) = (x^3)^m x^2 + (x^3)^n x + (x^3)^p \equiv x^2 + x + 1 \equiv 0 (\operatorname{mod} g),$$

което означава, че $g(x)$ дели $f(x)$ за произволни цели неотрицателни числа m, n, p. $\square$

Теорема. *Нека $f(x) \in F[x]$ е полином с коефициенти от полето F. Тогава съществува разширение $K \geq F$, такова че в него съществува елемент $\alpha \in K$, такъв че $f(\alpha) = 0$.*

Полиномът $f(x) \in F[x]$ с $\deg f > 0$ се нарича неразложим над полето F, ако не съществуват неконстантни полиноми $g(x), h(x) \in F[x] \backslash F$, такива че $\deg g, \deg h < \deg f$ и $f(x) = g(x)h(x)$. Ясно е, полиномите от първа степен са неразложими над всяко поле. Тогава като следствие от теоремата получаваме, че за полином $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in F[x]$ съществува разширение $K \geq F$, в което $f(x)$ се разлага по единствен начин във вида

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n),$$

където елементите $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ са корени на $f(x)$. Сечението на всички подполета на K, съдържащи F и всички корени $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ се нарича поле на разлагане на $f(x)$ над F.

Задача 9. *Разложете на неразложими множители над $\mathbb{Z}_5$ полинома*
а) $f(x) = x^2 + 1$,
б) $g(x) = 3x^3 + 4x^2 + 3$.

Решение. а) Непосредствено проверяваме, че

$$f(\overline{0}) = \overline{1} \neq \overline{0},$$

$$f(\overline{1}) = \overline{2} \neq \overline{0},$$

$$f(\overline{2}) = \overline{5} = \overline{0},$$

$$f(\overline{3}) = \overline{10} = \overline{0},$$

$$f(\overline{4}) = \overline{17} = \overline{2} \neq \overline{0}.$$

Оттук следва, че разлагането е

$$f(x) = (x - \overline{2})(x - \overline{3}) = (x + \overline{3})(x + \overline{2}).$$

б) Отговор: $g(x) = \overline{3}(x - \overline{1})(x - \overline{3})(x + \overline{2})$. $\square$

Ако е даден полиномът

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

то полиномът

$$f(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-1} + \cdots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}$$

се нарича производна на $f(x)$. Ако $f^{(k)}(x)$ е k-тата производна на $f(x)$ за $k = 1, 2, \ldots,$ то $f^{(k+1)}(x) = \big(f^{(k)}(x)\big)'$.

Казваме, че α е k-кратен корен на $f(x) \in F[x]$, ако $f(x) = (x-\alpha)^k g(x)$ за $g(x) \in F[x]$ и $g(\alpha) \neq 0$.

Теорема. *Елементът α на разширението $K \geq F$ е k-кратен корен на полинома $f(x) \in F[x]$ тогава и само тогава, когато*

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0$$

и

$$f^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

Задача 10. *Намерете стойностите на λ, за които полиномът*

$$f(x) = x^4 + \lambda x^3 + 27 \in \mathbb{C}[x]$$

има кратен корен.

Решение. Нека α е поне двукратен корен на $f(x)$. Тогава едновременно имаме

$$\left| \begin{array}{lll} f(\alpha) & = \alpha^4 + \lambda\alpha^3 + 27 & = 0, \\ f'(\alpha) & = 4\alpha^3 + 3\lambda\alpha^2 & = 0. \end{array} \right.$$

Т.к. допускането $\alpha = 0$ противоречи на първото равенство, то считаме, че $\alpha \neq 0$ и разделяме второто равенство на α^2, за да получим еквивалентната система

$$\left| \begin{array}{ll} \alpha^4 + \lambda\alpha^3 + 27 & = 0, \\ 4\alpha + 3\lambda & = 0. \end{array} \right.$$

Сега от второто уравнение намираме $\alpha = -\dfrac{3\lambda}{4}$ и заметсвайки този резултат в първото получаваме

$$\frac{3^4\lambda^4}{4^4} - \frac{\lambda 3^3\lambda^3}{4^3} + 27 = 0,$$

което ни дава четири стойности за λ, а именно

$$\lambda_{1,2} = \pm 4, \lambda_{3,4} = \pm 4i.$$

$\square$

Задача 11. *Покажете, че полиномът*

$$f(x) = x^{2n} - n^2 x^{n+1} + 2(n^2-1)x^n - n^2 x^{n-1} + 1$$

се дели на $g(x) = (x-1)^4$.

Упътване. Еквивалентно покажете, че 1 е поне четирикратен корен на $f(x)$, използвайки стойностите на полинома и първите му три роизводни в 1. $\square$

<u>Формули на Виет</u>
Нека полиномът

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in F[x]$$

се разлага в подходящо разширение $K \geq F$ на произведение от вида

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n),$$

където $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ са корените на $f(x)$. От принципа за срявняване на коефициентите получаваме връзките

$$\begin{aligned}
-\frac{a_1}{a_0} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \\
(-1)^2\frac{a_2}{a_0} &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n, \\
&\ldots \\
(-1)^k\frac{a_k}{a_0} &= \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k + \cdots + \alpha_{n-k+1}\alpha_{n-k+2}\ldots\alpha_n, \\
&\ldots \\
(-1)^n\frac{a_n}{a_0} &= \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n,
\end{aligned}$$

наречени формули на Виет. Десните страни на формулите се означават с $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ и се наричат елементарни симетрични полиноми на n променливи.

Задача 12. *При каква зависимост между коефициентите p, q, r на полинома $f(x) = x^3+px^2+qx+r$ между корените му x_1, x_2, x_3 съществува зависимостта $x_1x_2 = x_3$?*

Решение. Според фомулите на Виет имаме, че

$$\left|\begin{array}{rl} x_1 + x_2 + x_3 & = -p, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 & = q, \\ x_1x_2x_3 & = -r. \end{array}\right.$$

От връзката $x_1x_2 = x_3$ и чрез преработване на системата получаваме

$$\left|\begin{array}{rl} x_1 + x_2 & = -x_3 - p, \\ (1 + x_1 + x_2)x_3 & = q, \\ x_3^2 & = -r. \end{array}\right.$$

Заместваме израза за $x_1 + x_2$ във второто равенство и имаме

$$(1 - x_3 - p)x_3 = q,$$

което е еквивалентно на

$$x_3(1 - p) - x_3^2 = q.$$

Сега, имайки предивд, че $x_3^2 = -r$, последното равенство става

$$(1 - p)x_3 = q - r.$$

Сега повдигаме двете страни на квадрат, за да получим връзката

$$-(1 - p)^2r = (q - r)^2$$

или

$$(q - r)^2 + (1 - p)^2r = 0.$$

□

Задача 13. *Да се намерят стойностите на параметъра λ, за които между два от корените x_1 и x_2 на полинома*

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x + \lambda \in \mathbb{C}[x]$$

съществува зависимостта $x_1 + x_2 = x_1x_2$.

Решение. Отново започваме от формулите на Виет

$$\left|\begin{array}{rl} x_1+x_2+x_3 & =5, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 & =8, \\ x_1x_2x_3 & =-\lambda \end{array}\right.$$

и използваме исканата връзка $x_1+x_2=x_1x_2$, за да преработим системата до

$$\left|\begin{array}{rl} x_1+x_2 & =5-x_3, \\ (1+x_3)(x_1+x_2) & =8, \\ x_1x_2x_3 & =-\lambda. \end{array}\right.$$

Заместваме първото равенство във второто, за да получим

$$(1+x_3)(5-x_3)=8,$$

което всъщност е квадратно уравнение относно x_3 с корени 1 и 3. При $x_3=1$ имаме, че

$$x_1x_2=x_1+x_2=5-x_3=4$$

и тогава $\lambda=-x_1x_2x_3=-4$. При $x_3=3$ имаме $x_1x_2=2$ и тогава $\lambda=-6$. $\square$

Задача 14. *Нека разгледаме пръстенът $F[x]$ на полиномите на една променлива над полето F. Докажете, че $F[x]/(f)$ е поле тогава и само тогава, когато f е неразложим над F.*

Решение. Необходимост: нека $f\in F[x]$ и $F[x]/(f)$ е поле. Да допуснем, че f е разложим над $F[x]$. Тогава съществуват полиноми $g,h\in F[x]$, такива че $\deg g,\deg h<\deg f$, и $f=g\cdot h$. Тъй като степените на g и h са строго по-малки от степента на f, то $f\nmid g$ и $f\nmid h$ или иначе казано $g,h\notin(f)$ и $\overline{g}=g+(f)\neq(f)=\overline{0},\overline{h}\neq\overline{0}$ са ненулеви елементи във факторпръстена. Тогава обаче $\overline{g}\cdot\overline{h}=\overline{f}=\overline{0}$, което означава, че $\overline{g}$ и $\overline{h}$ са делители на нулата в полето $F[x]/(f)$. Противоречието доказва, че предположението, че f е разложим е невярно и следователно остава f да е неразложим.

Достатъчност: нека $f\in F[x]$ е неразложим над F. Тогава за произволен ненулев елемент $\overline{g}\in F[x]/(f)$ имаме, че $g\notin(f)$. Последното означава, че $f\nmid g$, но т.к. f е неразложим, това ни дава още и че $(f,g)=1$. Сега по тъждеството на Безу съществуват полиноми $u,v\in F[x]$, такива че $uf+vg=1$. Последното равенство изглежда като

$$\overline{u}\cdot\overline{f}+\overline{v}\cdot\overline{g}=\overline{1}$$

във факторпръстена $F[x]/(f)$ и е еквивалентно на

$$\overline{v} \cdot \overline{g} = \overline{1}.$$

По този начин доказахме, че произволен ненулев елемент $\overline{g} \in F[x]/(f)$ е обратим с обратен $\overline{v}$, което означава, че пръстенът $F[x]/(f)$ е поле. $\square$

Задача 15. *Покажете, че факторпръстенът $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + \overline{1})$ е поле с четири елемента.*

Решение. Имаме, че $x^2 + x + \overline{1}\big|_{x=\overline{0}} = \overline{1} \neq \overline{0}$ и $x^2 + x + \overline{1}\big|_{x=\overline{1}} = \overline{1} \neq \overline{0}$, което означава, че даденият полином е неразложим над $\mathbb{Z}_2$ и факторпръстенът $\mathbb{Z}_2/(x^2 + x + \overline{1})$ е поле. Ясно е, че всеки полином от степен ненадминаваща 1 попада в някой съседен клас на $\mathbb{Z}_2$, т.к. $x^2 + x + \overline{1}$ е от втора степен и е невъзможно да го дели. Обратно, ще видим, че всеки полином от факторпръстена е най-много от първа степен. Наистина, достатъчно е да доказем с помощта на принципа на математическата индукция, че $\deg x^k \leq 1$ за $k = 0, 1, \ldots$. И така, очевидно $\deg x^0, \deg x^1 \leq 1$. За x^2 имаме, че $x^2 \equiv -x - \overline{1}$ и $\deg x^2 = \deg(-x - \overline{1}) = 1$. Нека допуснем, че $\deg x^k \leq 1$. Ще докажем, че $\deg x^{k+1} \leq 1$. Наистина, щом $\deg x^k \leq 1$, то общият вид на x^k е $x^k \equiv \overline{a}x + \overline{b}$ за някакви елементи $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_2$. Тогава $x^{k+1} = xx^k = x(\overline{a}x + \overline{b}) = \overline{a}x^2 + \overline{b}x \equiv \overline{a}(-x - \overline{1}) + \overline{b}x = (\overline{b} - \overline{a})x - \overline{a}$. Сега е очевидно, че $\deg x^{k+1} \leq 1$. Така се оказа, че всички полиноми от $\mathbb{Z}_2/(x^2 + x + \overline{1})$ имат вида $\overline{a}x + \overline{b}$. За това има точно 4 възможности, а именно: $\overline{a} = \overline{b} = \overline{0}$; $\overline{b} = \overline{1}, \overline{a} = \overline{0}$; $\overline{b} = \overline{0}, \overline{a} = \overline{1}$; $\overline{a} = \overline{b} = \overline{1}$. Оттук следва, че

$$\mathbb{Z}_2/(x^2 + x + 1) = \{\overline{0} + I, \overline{1} + I, x + I, x + \overline{1} + I\},$$

където $I = (x^2 + x + 1)$. $\square$

Задача 16. *Определете дали фактропръстенът $\mathbb{Z}_3[x]/(f)$ е поле, ако*

$$f(x) = x^4 + x - \overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x].$$

Решение. Факторпръстенът $\mathbb{Z}_3[x]/(f)$ е поле точно когато полиномът $f(x)$ е неразложим над $\mathbb{Z}_3$. Тъй като $\deg f = 4$, то начините за разлагане на f са следните: като произведение на четири полинома от първа степен; като произведение на един полином от първа и един полином от трета степен; като произведение на два полинома от първа и един полином от втора степен; като произведение на два полинома от стора

степен. Ако в разлагането на f участват полиноми от първа степен, то това означава, че f има корен от полето $\mathbb{Z}_3$. Следователно полиномът $f(x)$ ще бъде неразложим над $\mathbb{Z}_3$, ако няма корени от $\mathbb{Z}_3$ и не се разлага в произведение

$$f(x) = g(x)h(x)$$

на неразложими полиноми $g, h \in \mathbb{Z}_3[x]$ от втора степен.

Непосредствено проверете, че $f(\overline{0}), f(\overline{1}), f(\overline{2}) \neq 0$.

Да допуснем, че $f(x)$ се разлага в произведение на неразложими полиноми от втора степен. Тогава бихме имали

$$x^4 + x - \overline{1} = (a_0x^2 + a_1x + a_2)(b_0x^2 + b_1x + b_2),$$

където $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_3$ за $i = 0, 1, 2$. По метода за сравняване на коефициентите получаваме, че

$$a_0b_0 = \overline{1},$$

$$a_0b_1 + a_1b_0 = \overline{0},$$

$$a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = \overline{0},$$

$$a_1b_2 + a_2b_1 = \overline{1},$$

$$a_2b_2 = -\overline{1}.$$

От последното равенство имаме, че $a_2 = \varepsilon$ и $b_2 = -\varepsilon$, където $\varepsilon = \pm\overline{1}$. Замествайки това в предпоследното равенство, получаваме, че

$$b_1 - a_1 = \varepsilon.$$

Първото равенство ни дава два случая: $a_0 = b_0 = \overline{1}$ и $a_0 = b_0 = -\overline{1}$. И в двата случая второто равенство става

$$b_1 + a_1 = \overline{0},$$

откъдето намираме

$$a_1 = \varepsilon, b_1 = -\varepsilon.$$

В първия случай третото неравенство е

$$b_2 + a_1b_1 + a_2 = \overline{0}$$

и когато заместим намерените стойности достигаме до противоречието $-\overline{1} = 0$. Във втория случай третото неравенство е

$$-b_2 + a_1 b_1 - a_2 = \overline{0}$$

и когато заместим получените стойности достигаме до същото противоречие.

От всичко казано дотук следва, че полиномът f наистина е неразложим и следователно фактропръстенът е поле. $\square$

Ако A е комутативен пръстен с единица, то с $A[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ означаваме пръстена на полиномите на n променливи с коефициенти от A. Всеки полином на n променливи се записва по единствен начин като сума на мономи

$$\sum_{\alpha} a_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} = \sum_{\alpha} a_\alpha x^\alpha,$$

сумирани по мултииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, където $a_\alpha \in A$ за всеки мултииндекс α. В множеството на мономите е въведена лексикографска наредба като мономът $A = a x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ предхожда монома $B = b x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}$, ако съществува индекс $1 \leq i \leq n$, такъв че $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}$, но $\alpha_i > \beta_i$. В такъв случай старшият член на полином на няклко променливи е мономът, който предхожда всики останали мономи, участващи в развитието на полинома, според лексикографската наредба. Степента на моном $A = a x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ е числото $\deg A = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Степента на полином на няколко променливи е просто степента на старшия му член. За старшия моном $a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ на кой да е полином е в сила $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n$.

Казваме, че полиномът $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ е симетричен, ако

$$f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

за всяка пермутация $\tau \in S_n$ на числата от 1 до n.

Полиномите

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\
\sigma_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n, \\
\ldots & \\
\sigma_n &= x_1 x_2 \ldots x_n
\end{aligned}$$

се наричат елементарни симетрични полиноми на n променливи. Ако $f \in A[x_1, \ldots, x_n]$ е симетричен полином, то той се представя по единствен начин като полином на елементарните симетрични полиноми.

Задача 17. *Изразете като полином на елементарните симетрични полиноми симетричния полином*

а) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_2^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2$,

б) $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3)$.

Решение. а) Следваме алгоритъма от доказателството на основната теорема за симетричните полиноми. Старшият моном на x се превръща в моном на σ по правилото

$$ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}x_n^{\alpha_n} \longrightarrow a\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2}\sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3}\dots\sigma_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n}\sigma_n^{\alpha_n}.$$

В случая имаме

$$x_1^4 \longrightarrow \sigma_1^{4-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^{0-0} = \sigma_1^4.$$

Сега старшият моном на полинома $f - \sigma_1^4$ има вида $Ax_1^3x_2$ за някакъв коефициент A и го превръщаме в

$$Ax_1^3x_2 \longrightarrow A\sigma_1^2\sigma_2.$$

Старшият моном на полинома $f - \sigma_1^4 - A\sigma_1^2\sigma_2$ има вида $Bx_1^2x_2^2$ и го превръщаме по правилото

$$Bx_1^2x_2^2 \longrightarrow B\sigma_2^2.$$

Старшият моном на полинома $f - \sigma_1^4 - A\sigma_1^2\sigma_2 - B\sigma_2^2$ има вида $Cx_1^2x_2x_3$ и го превръщаме по правилото

$$Cx_1^2x_2x_3 \longrightarrow C\sigma_1\sigma_3.$$

Приключваме преобразуването на четвъртата стъпка тъй като $\deg f = 4$ и не можем да получим други мономи на три променливи от степен 4, които да бъдат старши. Така получихме, че

$$f = \sigma_1^4 + A\sigma_1^2\sigma_2 + B\sigma_2^2 + C\sigma_1\sigma_3$$

и остава да определим коефициентите A, B, C. Имаме, че

$$0 = f(1, 1, -2) = 9B,$$

което определя $B = 0$. Още

$$0 = f(1, 1, 0) = 16 + 4A,$$

което определя $A = -4$ и накрая

$$-3 = f(1,1,1) = 3^4 - 4.3^2.3 + 3C$$

дава $C = 8$. Така окончателно намерихме, че

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 8\sigma_1\sigma_3.$$

б) Отговор: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sigma_1^2\sigma_4 + \sigma_3^2 - 4\sigma_2\sigma_4$. □

Задача 18. *Да се представи симетричният полином*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum x_1^2 x_2^2$$

като полином на елементарните симетрични полиноми $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ *на* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *за* $n \geq 4$.

Решение. Имаме, че

$$x_1^2 x_2^2 \longrightarrow \sigma_2^2.$$

Останалите мономи от степен 4, които изпълняват условието за старшия член са

$$Ax_1^2 x_2 x_3 \longrightarrow A\sigma_1\sigma_3$$

и

$$Bx_1x_2x_3x_4 \longrightarrow B\sigma_4.$$

Тогава

$$f = \sum x_1^2 x_2^2 = \sigma_2^2 + A\sigma_1\sigma_3 + B\sigma_4.$$

При $x_1 = x_2 = x_3 = 1, x_4 = x_5 = \cdots = x_n = 0$ имаме, че

$$f = \binom{3}{2} = 3, \sigma_1 = \binom{3}{1} = 3, \sigma_2 = \binom{3}{2} = 3, \sigma_3 = \binom{3}{3} = 1, \sigma_4 = 0,$$

откъдето намираме $A = -2$. При $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1, x_5 = x_6 = \cdots = x_n = 0$ имаме, че

$$f = \binom{4}{2} = 6, \sigma_1 = \binom{4}{1} = 4, \sigma_2 = \binom{4}{2} = 6, \sigma_3 = \binom{4}{3} = 4, \sigma_4 = \binom{4}{4} = 1,$$

откъдето намираме, че $B = 2$. Така окончателно

$$\sum x_1^2 x_2^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_4.$$

□

Задача 19. *Изразете рационалната функция*

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{x_2 + x_3} + \frac{x_2^2}{x_1 + x_3} + \frac{x_3^2}{x_1 + x_2}$$

като функция на елементарните симетрични полиноми $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Упътване. Представете функцията във вида

$$F = \frac{x_1^2(x_1 + x_3)(x_1 + x_2) + x_2^2(x_2 + x_3)(x_1 + x_2) + x_3^2(x_2 + x_3)(x_1 + x_3)}{(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)}$$

и изразете поотделно числителя и знаменателя като полиноми на $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Отговор:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{\sigma_1^4 - 3\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3}.$$

□

Изразите

$$\begin{aligned} S_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ S_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2, \\ \cdots & \\ S_k &= x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k. \end{aligned}$$

са симетрични полиноми на n променливи, наречени степенни сборове. По дефиниция $S_0 = n$. В сила са формулите

$$\begin{aligned} S_1 - \sigma_1 &= 0, \\ S_2 - \sigma_1 S_1 + 2\sigma_2 &= 0, \\ S_3 - \sigma_1 S_2 + \sigma_2 S_1 - 3\sigma_3 &= 0, \\ \cdots & \\ S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \sigma_2 S_{k-2} - \cdots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1} S_1 + (-1)^k k\sigma_k &= 0, \end{aligned}$$

наречени формули на Нютон.

Задача 20. *Пресметнете сумата от третите степени на корените на уравнението*

$$x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0.$$

Решение. По формулите на Виет пресмятаме, че

$$\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = -3, \sigma_4 = -2.$$

Сега според формулите на Нютон имаме

$$S_1 = \sigma_1 = 2, \quad S_2 = 2S_1 - 2 = 4 - 2 = 2,$$
$$S_3 = 2S_2 - S_1 - 3.3 = 4 - 2 - 9 = -7.$$

□

Задача 21. *Пресметнете*

$$S_{-3} = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \frac{1}{x_3^3},$$

ако x_1, x_2, x_3 *са корени на уравнението*

$$2x^3 + 3x + 4 = 0.$$

Решение. Умножаваме двете страни на усравнението с $\frac{1}{x^3}$ и полагаме $y = \frac{1}{x}$. По този начин получаваме реципрочното уравнение

$$4y^3 + 3y^2 + 2 = 0$$

и неговият трети степенен сбор, ще е равен на степенният сбор S_{-3}, който търсим. Имаме, че

$$S_1(y) = -\frac{3}{4}, \quad S_2(y) = \frac{9}{16}, \quad S_3(y) = -\frac{123}{64} = S_{-3}.$$

□

Нека

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in F[x]$$

и

$$g(x) = b_0x^k + b_1x^{k-1} + \cdots + b_{k-1}x + b_k \in F[x]$$

са два полинома над полето F, а техните корени, съответно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ лежат в разширение $K \geq F$. Резултанта на полиномите f и g наричаме елемнта

$$R(f, g) = a_0^k b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} (\alpha_i - \beta_j) \in F.$$

Ясно е, че f и g имат общ корен $\iff$ $R(f, g) = 0$. В сила е формулата

$$R(f, g) =$$

Задача 22. *Намерете стойностите на λ, за които полиномите*

$$f(x) = x^3 - \lambda x + 2 \text{ и } g(x) = x^2 + \lambda x + 2$$

имат общ корен

Решение. Полиномите f и g имат общ корен точно когато резултантата им $R(f,g)$ е равна на нула. Налагаме условието $R(f,g) = 0$, което е еквивалентно на

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 2 \\ 1 & \lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Изваждаме първия от третия и втория от петия ред на детерминантата, за да получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & \lambda & 2+\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2\lambda & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Развиваме новата детерминанта по първи стълб, а резултатната детерминанта по четвърти стълб. Имаме

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & \lambda & 2+\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2\lambda & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda & 2 \\ \lambda & 2+\lambda & -2 & 0 \\ 1 & \lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2\lambda & 0 \end{vmatrix} = 2.(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} \lambda & 2+\lambda & -2 \\ 1 & \lambda & 2 \\ -1 & 1 & 2\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -4(\lambda+1)^2(\lambda-3) = 0.$$

Това е възможно точно при $\lambda = -1$ или $\lambda = 3$. $\square$

Нека $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in F[x]$ е полином, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K \leq F$ са неговите корени. Тогава елемемнтът на полето F

$$D(f) = a_0^{2n-2} \prod_{i>j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

се нарича дискриминанта на полинома f. Ясно е че $D(f) = 0 \iff f$ има кратен корен. В сила са формулите

$$R(f, f') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0 D(f)$$

и

$$D(f) = a_0^{2n-2} \begin{vmatrix} n & S_1 & \dots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Задача 23. *За кои стойности на λ полиномът*

$$f(x) = x^3 - x^2 + \lambda x + 1$$

има кратен корен?

Упътване. Пресметнете степенните сборове S_1, S_2, S_3, S_4 от формулите на Виет и формулите на Нютон. След това използвайте, че

$$D(f) = \begin{vmatrix} 4 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \end{vmatrix}.$$

Отговор: $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = \dfrac{5 \pm 7\sqrt{7}i}{8}$. □

Разложимост на полиномите:

Според основната теорема на алгебрата надполето на комплесните числа $\mathbb{C}$ няма неразложими полиноми (това всъщност означава, че само полиномите от първа степен са неразложими, т.к. те винаги са такива). Над полето на реалните числа $\mathbb{R}$ неразложими са само полномите от първа степен и тези от втора степен с отрицателна дискриминанта. Сега ще разгледаме критерии за неразложимост на полиноми над полето на рационалните числа $\mathbb{Q}$.

За произволен полином $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ имаме, че $g(x) = \dfrac{1}{q} f(x)$ за полином $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ и число q, което е (най-малко) общо кратно на знаменателите на коефициентите на g. Тогава $g(x)$ и $f(x)$ едновременно са разложими или неразложими над $\mathbb{Q}$.

Критерий на Айзенщайн: нека е даден полиномът

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in \mathbb{Z}[x].$$

Ако съществува просто число p, такова че
1) $p \nmid a_0$,
2) $p \mid a_1, a_2, \ldots, a_n$,
3) $p^2 \nmid a_n$,
то $f(x)$ е неразложим над $\mathbb{Q}$.

Задача 24. *Разложим ли е полиномът*

$$f(x) = 3x^4 - 15x^3 + 10x^2 - 20x + 35$$

над $\mathbb{Q}$*?*

Решение. Не. Използвайте критерия на Айзенщайн за $p = 5$. $\square$