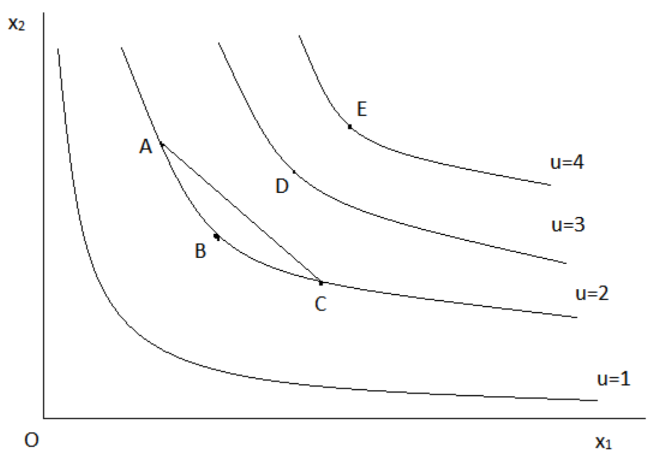
4. Теория за поведението на потребителя

Функции на полезност. За разлика от поведението на производителите, чиято единствена цел е да получат максимална печалба, поведението и мотивацията на потребителя не са толкова прости. Всеки един индивид има своите предпочитания към или измежду широка гама от стоки и няма очевиден начин да се изрази формално неговото желание. Затова ние ще приемем един математически подход, който има целта да моделира поведението на потребителя, който се опитва да удовлетвори многомерните си желания.
Да допуснем, че един типичен потребител, поставен пред избора колко да потреби от n различни стоки, има предпочитания, които могат да бъдат изразени чрез функцията на полезност:

$$U(x) = U(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{1}$$

където $x_1, x_2, ..., x_n$ са броят на единиците, които потребителя иска да купи съответно от първата, втората,...,n-тата стока. Ако случайно две стоки имат една и съша стойност на полезност, то потребителят е безразличен в предпочитанието си към всяка една от тях.
Ако $n = 2$, тогава можем да представим функцията на полезност във вид на графикана кривата на безразличие:



фиг.14

Контурите на $U(x)$ представляват различните "пакети" от стоки, които имат еднаква полезност. те се наричат линнии на безразличие. В т.A, т.B и т.C полезноста е една и съща, докато в т.D и т.E полезноста е по-висока.
Сега щя изкажем някои свойства на $U(x)$: 1) $U(kx) > U(x)$ за $k > 1$, т.е. потребителят предпочита повече пред по-малко стоки, така че кривите на безразличието, които са по-далече от началото на координатната система, показват по-голяма полезност; 2) $U(x)$ е вдлъбната, т.е. ако за някое ниво на полезност $U(x_1, x_2) = u$ имаме

$$\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right) = -\frac{U_1}{U_2}. \tag{2}$$

$\frac{U_1}{U_2}$ се нарича потребителска маргинална норма на заместване. От свойство 2) следва, че функцията на полезност има свойството маргиналната норма на заместване да намалява:

$$\frac{U_1/U_2}{x_1/x_2} \leq 0. \tag{3}$$

Маргиналната норма измерва количеството x_2, от което потребителят се нуждае, за да компенсира загубата на единица стока от x_1. Съответно очакваме, с нарастването на отношението x_1/x_2, маргиналната норма да намаля своята стойност.

Максимализиране на полезността и функции на търсенето. Да разгледаме проблма за максимализирането на полезноста, ако потребителя разполага с паричен доход m, предназначен за закупуване на стоки.
Нека векторът $p(p_1, p_2, ..., p_n)$ представя цените на съответните стоки. Тогава трябва да е изпълнено следното неравенство:

$$\begin{gathered} p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \leq m \text{ или} \\ \mathbf{px} \leq m. \end{gathered} \tag{4}$$

Ще приемем също така, че потребителят не може да промени нито цените $\mathbf{p}$, нито дохода m.
Свойството 1) показва, че потребителя ще похарчи целия си приход, т.е.

$$\mathbf{px} = m. \tag{5}$$

Така можем да приложим метода на Лагранж за оптимизация, т.е.

$$max_{x,\lambda}\{L(x, \lambda) = U(x) + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2 - ... - p_nx_n)\}. \tag{6}$$

Условията за максимум са

$$\begin{gathered} \frac{\partial U}{\partial x_i} = \lambda p_i \text{ ,за i=1,2,...,n} \\ m = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \end{gathered} \tag{7}$$

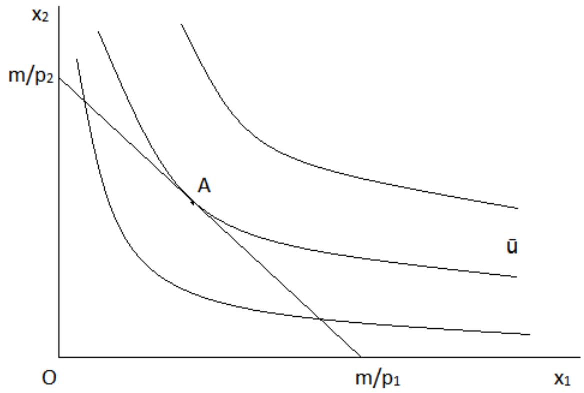
Така $x = x(p, m)$ и $\lambda = \lambda(p, m)$

$$\lambda = \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{1}{p_i} \text{ i=1,2,...,n} \tag{8}$$

Това е маргиналната потребителска полезност.
При максимално ниво полезност не е възможно

$$\frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{1}{p_j} < \frac{\partial U}{\partial x_k}\frac{1}{p_k}, \tag{9}$$

така, че потребителят може да повиши полезноста си чрез пренасочване на пари от стоката j към стоката k. В случая на две стоки, това може да се покаже и графично:



фиг.15

При дадени m, p_1, p_2 придвижваме нивото на полезност до ū, така че то да се допира правата px=m в т..
Примери:
1) Нека $U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, където $\alpha \in (0, 1)$ и да максимализираме полезноста

$$\max_{x_1, x_2, \lambda}\{L(x, \lambda) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} + \lambda(m - p_1 x_1 - p_2 x_2)\} \tag{10}$$

Условията са

$$\begin{gathered} \lambda x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} = \lambda p_1 \\ (1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha} = \lambda p_2 \\ m = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{gathered} \tag{11}$$

или

$$\begin{gathered} \alpha \tfrac{U}{x_1} = \lambda p_1 \\ (1-\alpha) \tfrac{U}{x_2} = \lambda p_2 \\ m = p_1 x_1 + p_2 x_2. \end{gathered} \tag{12}$$

Така получихме $x_1(p, m) = \frac{\alpha m}{p_1}$ и $x_2(p, m) = \frac{(1-\alpha)m}{p_2}$. Тези функции се наричат функции на потребителското търсене.
2) Нека $U(x_1, x_2) = x_1^{1/2} + x_2^{1/2}$ и отново да максимализираме полезноста:

$$max_{x_1, x_2, \lambda}\{L(x, \lambda) = x_1^{1/2} + x_2^{1/2} + \lambda((m - p_1 x_1 - p_2 x_2)\}. \tag{13}$$

От

$$\begin{array}{c} \frac{1}{2}x_1^{-1/2} = p_1 x_1 \\ \frac{1}{2}x_2^{-1/2} = p_2 x_2 \\ m = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{array} \tag{14}$$

получаваме $\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{p_1}{p_2}$ и съответно $x_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 x_1$. Освен това получаваме и $x_1(p,m) = \frac{p_2 m}{p_1(p_1+p_2)}$ и $x_2(p,m) = \frac{p_1 m}{p_2(p_1+p_2)}$.

Минимализиране на разноските и конпенсирани функции на търсенето. Да разгледаме проблема за минимализиране на разноските на даден портебител, необходими за достигане на определена крива на безразличие. Формално това можем да го запишем така:

$$\min_{\mathbf{x}}\{\mathbf{px}, U(x) = u\} \text{ ,където u е фиксирано.} \tag{15}$$

Отново ще използваме метода на Лагранж:

$$\min_{\mathbf{x},\mu}\{L(\mathbf{x},\mu) = \mathbf{xp} + \mu(u - U(x))\}. \tag{16}$$

Съответно условията за минимум са:

$$\begin{array}{c} p_i = \mu\frac{\partial U}{\partial x_i} \text{ ,i=1,2,...,n} \\ U(x) = x. \end{array} \tag{17}$$

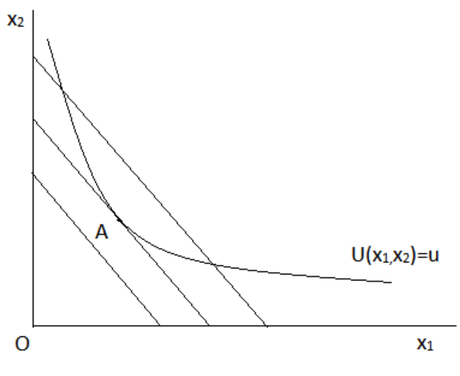
От последното можем да намерим $x_i = x_i(\mathbf{p}, u), i = 1, 2, ..., n$, които се наричат компенсирани функции на търсенето.
Аналогично на функцията на фирмените разходи, функцията на разноските на потребителитя се дефинира чрез

$$e(\mathbf{p}, u) = \mathbf{px}(\mathbf{p}, u), \tag{18}$$

т.е.

$$e(\mathbf{p}, u) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i(\mathbf{p}, u). \tag{19}$$

Нека отново разгледаме случая, когато потребителя избира между две стоки:



фиг.16

На фиг.16. нивата на разноските $p_1x_1+p_2x_2$ са представени чрез успоредни линии, като по-ниските разноски са по-близо до началото на кординатната система. Най-ниското ниво на разноските, отговарящо на u, съответства на бюджетната линия, която е допирателна към кривата на безразличието в т.A.
Нека сега разгледаме едно интересно свойство на функцията н арзноските. Нека разгледаме случая, когато p_i се променя и да изследваме $x(\mathbf{p},u)$ и $e(\mathbf{p},u)$.
От (19) получаваме

$$\frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_i}=x_i+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_j}{\partial p_i}=x_i(\mathbf{p},u)+\mu\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial p_i}, \tag{20}$$

но $U(x)=x$, следователно $\frac{\partial U}{\partial x_j}=0$, $j=1,2,...,n$ и получаваме

$$\frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_i}=x_i(\mathbf{p},u), \tag{21}$$

т.е. производната на функцията на разноските по отношение на цената на една стока се равнява на търсенето количество от тази стока.
Ако x_i не бяха функции на цените, а вместо това бяха константи, тогава (21) очевидно щеше да е вярно, тъй като $e=\sum_{j=1}^{n}p_jx_j$. Но всяко x_j зависи от цените, включително p_i, така че имаме n на брой влияния p_i върху e. Така показахме, че сборът на всички странични влияния винаги трябва да бъде равен на нула.
Друг резултат от направените разсъждения, е че

$$\frac{\partial x_i(\mathbf{p},u)}{\partial p_j}=\frac{\partial x_j(\mathbf{p},u)}{\partial x_i}, \tag{22}$$

което следва от

$$\frac{\partial^2 e(\mathbf{p},u)}{\partial p_i\partial p_j}=\frac{\partial^2 e(\mathbf{p},u)}{\partial p_j\partial p_i} \tag{23}$$

и от (21).
Нека сега разгледаме следния пример:

$$U(x)=x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha},\ \text{където}\ \alpha\in(0,1). \tag{24}$$

За компенсираните функции на търсенето имаме $x_1(p_1,p_2,u)=\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\alpha}u$ и $x_1(p_1,p_2,u)=\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha}u$, където $U(x)=u$. За функцията на разноските получаваме

$$e(p_1,p_2,u)=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_2}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}u \tag{25}$$

Уравнение на Слуцки. Видове стоки. Нека сега разлгеаме зависимостите между функциите на търсенето $x(p,m)$ и компенсираните функции на търсенето $x(p,u)$.
Ясно е, че ако потребителят решава проблема за минимализиране на разноските с полезност u, а всъщност харчи m, тогава същият пакет от стоки максимализира полетозноста

при бюджет m, като дава стойност u на полезноста. Графично изразено, кривата на безразличието u представлява най-високото ниво на полезност, отнасящо се към бюджетната линия m, а тази бюджетна линия представя най-високото ниво на разноски, отнасящо се към кривата на безразличието.
Следователно

$$x_i(p,u) = x_i(p,m), \text{ ако } m = e(p,u), \tag{26}$$

където $e(p,u)$ е функцията на разноските, т.е:

$$x_i(p,u) = x_i(p, e(p,u)) \tag{27}$$

Нека диференцираме по p_i:

$$\frac{\partial x_i(p,u)}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_i} + \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m}\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}, \tag{28}$$

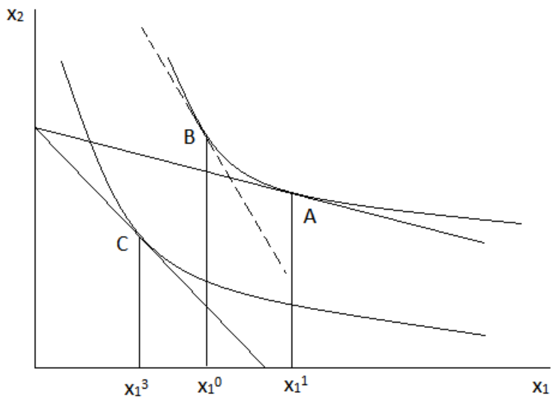
но тъй като $\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = x_i$, то

$$\frac{\partial x_i(p,u)}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_i} + x_i\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m} \tag{29}$$

или

$$\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i(p,u)}{\partial p_i} - x_i\frac{\partial x_i(p,m}{\partial m} \tag{30}$$

Уравнение (30) се нарича уравнение на Слуцки, като то разделя ценовия ефект върху търсенето на ефект на заместването и ефект на приходите.
При постоянен паричен приход, покачването на p_i има два ефекта:
1) прави стоката i относително по-скъпа в сравнение с другите стоки;
2) намалява реалните приходи на потребителя чрез намаляване количеството стоки, които потребителят може да си купи с приход m.
Ефектът на заместване е първия ефект: какво би предизвикало едно покачване на p_i върху x_i, ако реалният доход на потребителя е останал непроменен. Ефектът на приходите е вторият ефект: показва, че x_i измерва ефекта върху разходите на живот при покачване на p_i. така че измерва и намаляването на реалната стойност на фиксирания паричен приход m, като го умножим по $\frac{\partial x_i}{\partial m}$ получаваме ефекта на приходите.
Нека да разгледаме случая на две стоки. На фиг.17 е показан ефекта от крайното нарастване на p_1:



фиг.17

По принцип бюджетната линия е допирателна към кривата на безразличието вточката A. При показване на p_1, когато p_2 и m са константи, не се променя точката на пресичане с оста x_2, но се премества пресечната точка с оста x_1 към началото и новата бюджетна линия се допира до кривата на безразличие в точка C. Бюджетната линия сменя наклона си и се мести към началото на координатната система. Ако се повиши прихода, така че да се запази ниво на безразличие, бюджетната линия ще допира ниво в точката B с количество x_1^0.
Имаме

$$\frac{\partial x_i(p,u)}{\partial p_i} \leq 0, \tag{31}$$

т.е. ефектът на заместване е отрицателен или компенсираното търсене на коя да е стока е намаляваща функция на цената на тази стока.
Възможни са два случая:

$$\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m} > 0, \text{ при нормални стоки} \tag{32}$$

и

$$\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m} < 0, \text{ при малоценни стоки.} \tag{33}$$

В първия случай потреблението нараства с нарастването на прихода, докато при втория случай потреблението на тези стоки намалява с увеличаването на прихода. Така, ако е изпълнено (32), то от уравнението на Слуцки имаме, че $\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_i} < 0$, т.е. нормалната стока има отрицателен ценови ефект или функцията на търсене на нормалната стока е намаляваща спрямо цената на тази стока.
Ако $\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m} > 0$, то $\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_i}$ има неопределен знак.
Ако ефектът на приходите превъзхожда ефекта на заместването, търсенето на стоката ще расте с увеличението на цената. Такива стоки се наричат стоки на Гифен. За тях е изпълнено:

$$\left|\frac{\partial x_i(p,u)}{\partial p_i}\right| < \left|\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m}\right|. \tag{34}$$

Пример за такава стока е лотарийния билет, при който с нарастването на джакпота се увеличава търсенето от страна на потребителите и се увеличава и цената на билета.
Нека сега имаме

$$\frac{\partial x_i(p,u)}{\partial p_j} = \tag{35}$$

Ако (35) е положително, стоките i и j се наричат заместители„ а ако е отрицателно, то те се наричат допълващи се стоки. Маслото и маргаринът са заместители един на друг, докато маслото и хлябът са допълващи се стоки.
Нека сега

$$\frac{\partial x_i(p,u)}{\partial p_j} \neq \frac{\partial x_j(p,u)}{\partial p_i} \tag{36}$$

Ако $\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j} > 0$, то тогава стоката i е основен заместител на стоката j. Ако пък $\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j} < 0$, то i е основна допълваща стока j.

Трудът, като стока. Чрез разширяване на теорията на консуматора е възможно да се състави прост модел за предлагането на труда.
Нека $\mathbf{x}$ е векторът на стоките, консумирани седмично от потребителя, а L е броят на часовете, които работи седмично. Понеже седмицата има общо 168 часа, един потребител има свободно време изразено чрез

$$N = 168 - L. \tag{37}$$

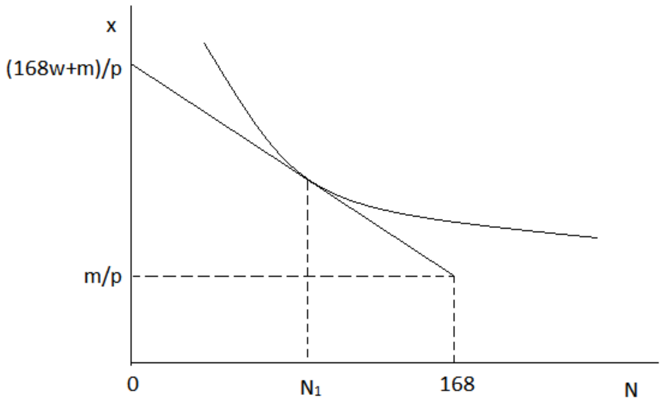
Нека да разгледаме свободното време като "стока", която му дава възможност да се наслаждава на живота. Така функцията на полезност е $U = U(x, N)$.
Нека приемем, че m е допълнителния приход на потребителя, а w е неговото почасово заплащане. Тогава общия наличен доход за разноски за x е $wL + m$, т.е. бюджетните ограничения са:

$$p\mathbf{x} = wL + m \tag{38}$$

или получаваме

$$p\mathbf{x} + wN = 168w + m. \tag{39}$$

Следователно целта на индивида е да максимализира $U(x, N)$ при условие (39).
Потребителят започва седмицата с пари m и 168 часа, всеки от който може да бъде продаде за w. Така всеки свободен час, който си позволява струва w, точно както всяка единица стока i струва p_i.
Случаят, когато в x има само една стока е илюстриран на фиг.18.



фиг.18

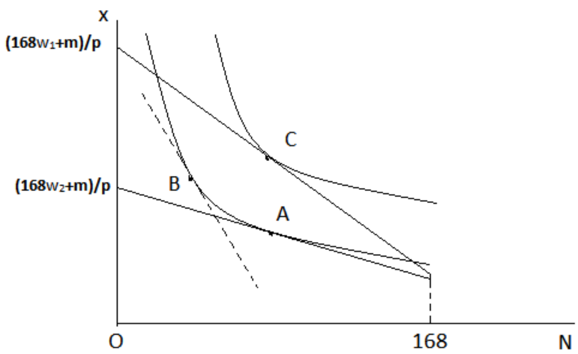
Бюджетната линия завършва в $N = 168$, $x = \frac{m}{p}$, тъй като не може $L < 0$.
Наклонът на бюджетната линия $\frac{w}{p}$ се нарича реална надница, тъй като тя се измерва в стока, която се получава от един допълнителен час труд.
Нека сега използваме метода на Лагранж, за да максимализираме $U(x, N)$ при условие (39).

$$\max_{x,N,\mu}\{\Lambda(x, N, \mu) = U(x, N) + \mu(168w + m - p\mathbf{x} - wN)\} \tag{40}$$

Така получаваме условията:

$$\frac{\partial U(x,N)}{\partial x_i} = \mu p_i$$
$$\frac{\partial U(x,N)}{\partial N} = \mu w$$
$$p\mathbf{x} + wN = 168w + m$$

Нека демонстрираме какво би се случило, ако надницата w се повиши(фиг.20).



фиг.19

Избраната т.(при надница w_1) се измества в т.C(при надница w_2). Точка C лежи на по-висока крива на безразличие, което показва, че реалния доход се е повишил. Преместването от т.A в т.B е ефекта на заместването: покачването на надницата води до покачване в относителните разходи за свободно време, така че търсенето на свободно време пада, а предлагането на труд нараства. Преместването от т. B в т. C е ефектът на дохода, което води до покачване на търсенето на свободно време и спад в предлагането на труд.