2. Поведение на производителя

Максимизиране на печалба. В тази глава ще разгледаме теорията на поведението на производителя и ще обясним някои аспекти от теорията на търсенето и предлагането. Принципно, фирмите, които предлагат стоки за сложни организации, чиито дейности не могат лесно да се моделират, но за нашата теория ще направим ще подходим просто. Фирмите използват начални елементи, които ще означаваме с $z_1, z_2, ..., z_n$, за да произведе готова продукция y. Производствената функция

$$y = F(z_1, z_2, ..., z_n)$$

показва количеството готова продукция, която се получава от количествата началните елементи. Също така началните елементи $z_1, z_2, ..., z_n$ имат цени, които ще означаваме съответно с $w_1, w_2, ..., w_n$. Така цената на началните стоки ще е

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i z_i.$$

Освен това, ако фирмата продава готовата продукция на цена p, то тогава тя ще има приход от py. Печалбата на фирмата ще е:

$$py - \sum_{i=1}^{n} w_i z_i. \tag{1}$$

Тъй като всяка фирма иска да увеличи своята печалба, то тогава ще търсим максимум на (1):

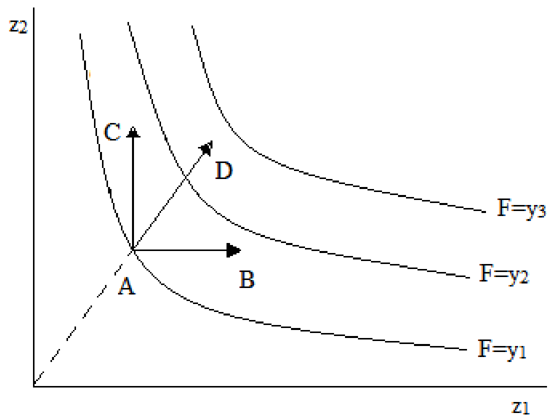
$$\max_{z_1,...,z_n} \{pF(z_1, z_2, ..., z_n) - \sum_{i=1}^{n} w_i z_i\}. \tag{2}$$

Това представлява една оптимизационна задача. Намирането на максимум на функция на няколко променливи е значително по-трудно от това на една променлива. Необходимо условие за намиране на максимум на функция $f(x)$ на една променлива е производната и $f'(x)$ в точната на максимум да е равна на нула, но ние знаем че това не е достатъчно условие(може тази точка да е минимум или инфлексна точка). При функции на повече от една променлива, това условие се заменя с условието частните производни в точката да са равни на нула. В нашия случай имаме:

$$p\frac{\partial F}{\partial z_i} = w_i, i = 1, 2, ..., n. \tag{3}$$

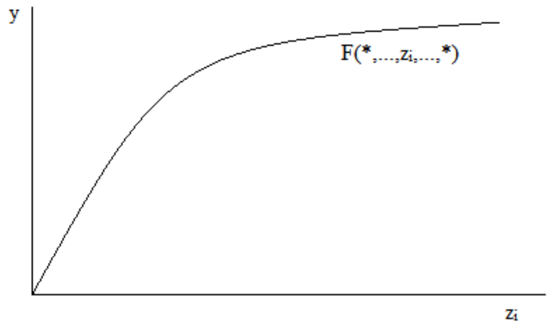
Икономическото обяснение на уравненията (3) е просто. За фиксирано i, лявата страна представлява ефекта върху готовата продукция на една отделна единица от началния елемент, умножена с цената на готовата продукция. Десните страни са съответно разходите по използване на отделни единици от началните елементи. $\frac{\partial F}{\partial z_i}$ се нарича маргинален продукт на началния елемент i, а $p\frac{\partial F}{\partial z_i}$ стойност на маргиналния продукт.
Ако например фирмата избере количество на началните елементи $(z_1, ..., z_n)$ и за z_1 е изпълнено $p\frac{\partial F}{\partial z_1} < w_1$, то това означава че фирмата може да спети от z_1(да намали z_1, докато последното стане равенство), за да повиши своята печалба.

Възвръщаемост относно машаба. Сега ще разгледаме по-подробно свойствата на производствената функция. За да добием графичка представа ще вземем производствена функция на два аргумента, т.е. два начални елемента z_1, z_2. Нека разгледаме фиг.6, за координатни оси сме взели z_1 и z_2. Кривите, които са начертани се наричат изокванти.



фиг.6

Всяка точка от дадена изокванта отговаря на точно една стойност на производствената функция F. Най-долната от показаните стойности отговаря на y_1, а най-горната на y_3.
Сега ще разгледаме начините, по които готовата продукция се влияе от промените в началните елементи. Ако z_2 е константа, а z_1 нараства, то това движение е изобразено на изоквантната диаграма с движение от т.A към т. B. Аналогично начина на нарастване на z_2, когато z_1 е константа е изобразен със стрелка от т.A към т. C. В общия случай това се изразява чрез частна производна по някой от аргументите на функцията $F(z_1, ..., z_n)$.
Ако z_i се променя, а всички други входни елементи останат постоянни, то промяната в производството F се изразява чрез $\frac{\partial F}{\partial z_i}$, т.е. това е маргиналния продукт на началния елемент i.
Една производствена функция обикновено има свойството, маргиналния продукт $\frac{\partial F}{\partial z_i}$ да намаля с увеличаване на z_i. Това и свойство се нарича спадаща възвръщаемост относно вложения входен елемент i. Това е показано на фиг.7, за фиксирани стойности на $z_1, ...z_{i-1}, z_{i+1}, ..., z_n$ е показана връзката между y и z_i.



фиг.7

Обикновено е ясно, че $\frac{\partial F}{\partial z_i}$ намалява отностно z_i, но това може да се провери чрез втората частна производна да удовлетворява

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_i^2} < 0.$$

Сега ще разгледаме случая, когато z_1 и z_2 се изменят едновременно. Това е показано на фиг.6 със стрелка от т.A към т.D, като увеличението на z_1 и z_2 е в едни и също съотношение. В общия слъчай това се изразява просто като умножим $\mathbf{z}(z_1, ..., z_n)$ с число k, т.е. $k\mathbf{z}$.
Ако $k > 1$, производствената функция изпълнява

$$F(k\mathbf{z}) = kF(\mathbf{z}), \tag{4}$$

то за нея се казва, че има постоянна възвръшаемост относно мащаба. Ако

$$F(k\mathbf{z}) > kF(\mathbf{z}), \tag{5}$$

то се казва, че производствената функция има нарастваща възвръщаемост относно мащаба. Съответно ако

$$F(k\mathbf{z}) < kF(\mathbf{z}), \tag{6}$$

то тя има намаляваща възвръшаемост относно мащаба. За примери можем да дадем производствени функции $y_1 = z_1^{\frac{1}{2}} z_2^{\frac{1}{2}}$ и $y_2 = z_1^{\frac{2}{3}} z_2^{\frac{1}{2}}$. Първата има намаляваща възвръщаемост относно двата начални елемента и постоянна възвръщаемост относна мащаба, втората отново има намаляваща възвръщаемост относно двата начални елемента, но нарастваща възвръщаемост относно мащаба.

Минимизиране на разходите. Задачите за намиране на максимум или минимум на функция са задачи на математическото оптимиране, които се разглеждат по-подробно в горните курсове. Тъй като искаме да избегнем някой затруднения от математическо естество ще разгледаме по-простата задача, където фирмата знае нивото на готова продукция, която иска да произведе и целта е да се минимизират разходите при производствения

процес.
Следователно ние имаме задачата:

$$\min \sum_{i=1}^{n} w_i z_i, \tag{7}$$

при условие

$$F(z_1, ..., z_n) = y, \tag{8}$$

където y е константа. Това е оптимизационна задача, като променливите трябва да удовлетворят ограничението $F(\mathbf{z}) = y$ и да се намери решение на (7).
За намиране на решението ще използваме функцията на Лагранж

$$L(\mathbf{z}, \lambda) = \sum w_i z_i + \lambda(y - F(\mathbf{z})). \tag{9}$$

Тя се състои от функцията, която искаме да минимизираме и условието (8), приравнено на нула, умножено с променливата λ, която се нарича множител на Лагранж. Така получената функция има $n+1$ променливи $z_1, ..., z_n, \lambda$. Сега нека диференцираме функцията на Лагранж относно всяка една пролемлива. Получаваме

$$w_i - \lambda \frac{\partial F}{\partial z_i} = 0, i = 1, ..., n, \tag{10}$$

$$y = F(\mathbf{z}). \tag{11}$$

Решението $z_1, ..., z_n$ на задача (7), трябва да удовлетворява уравненията (10) и (11). Нека решим (10) относно λ:

$$\lambda = \frac{w_i}{\partial F / \partial z_i}, i = 1, ..., n. \tag{12}$$

Числителят представлява разхода за една отделна единица от началния елемент i, докато знаменателят е маргиналния продукт. Тяхното частно представлява разходът за една единица(маргинален разход) за получаване на по-голямо количество готова продукция чрез използване на по-голямо количесто от началния елемент i. Да прием, че (12) не е удовлетворено, тпгава б.о.о. приемаме, че $\frac{w_1}{\partial F/\partial z_1} > \frac{w_2}{\partial F/\partial z_2}$. Можем да намалим разходите като намалим z_1 и увеличим z_2, тъй като искаме продукцията да е фиксирана $F(\mathbf{z}) = y$, т.е. ако (10) не е удовлетворено, задачата не може да се реши. Следователно (10) и (11) са необходими условия за решаването на (7).