Базис и размерност.

Нека V е лиенйно пространство над поле F, а $B \subseteq V$ е система вектори. Казваме, че векторите от B са *базис* на V, ако B е линейно независима система и $\ell(B) = V$.

Примери:
1. В линейното пространство F^n векторите $e_1(1, 0, \dots, 0), e_2(0, 1, \dots, 0), \dots, e_n(0, 0 \dots, 1)$ образуват базис. Наистина, по-рано видяхме, че те са линейно независими, а освен това за произволен векотр $a \in F^n : a(a_1, a_2, \dots, a_n)$, където $a_i \in F$ имаме представяне от вида $a = a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n$, т.е. $\ell(e_1, e_2, \dots, e_n) = V$.
2. В линейното пространство $F^{n+1}[x]$ системата $1, x, \dots, x^n$ е базис. Вече знаем, че векторите от нея са линейно независими. Също така имаме, че $\ell(1, x, \dots, x^n) = F^{n+1}[x]$, защото за произволен полином $f(x) \in F^{n+1}[x], (\deg f \leq n)$ е добре известно представянето $f(x) = a_0.1 + a_1x + \dots + a_nx^n$ с числа $a_i \in F, \quad i = 0, \dots, n$.
3. В линейното пространство $F[x]$ безкрайната система $1, x, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots$ е базис.

Казваме, че линейното пространство V е *крайномерно*, ако V има поне един краен базис. В противен случай V се нарича *безкрайномерно*.

В по-горните примери пространствата F^n и $F^{n+1}[x]$ очевидно са крайномерни, а $F[x]$ е безкрайномерно.

Твърдение 1. *Ако V е крайномерно ненулево линейно пространство, то всеки два базиса на V се състоят от един и същ брой вектори.*

Доказателство. Щом V е крайномерно, то съществува поне един негов краен базис $a_1, a_2, \dots, a_n, n \in \mathbb{N}$. Нека B е произволен базис на V. Да допуснем, че B притежава $> n$ на брой вектори и нека векторите

$b_1, b_2, \ldots, b_{n+1} \in B$. Т.к. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са базис на V, то $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1} \in \ell(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Но $n+1 > n$ и според основната лема векторите $b_1, \ldots, b_{n+1}$ са линейно зависими, а оттам и цялата система B. Но тогава B няма как да бъде базис. Достигнахме до противоречие. Следователно B трябва да съдържа $\leq n$ на брой вектори. Нека например $B = \{c_1, \ldots, c_m\}, m \leq n$. Ако допуснем, че $m < n$, то в комбинация с факта, че $a_1, \ldots, a_n \in \ell(c_1, \ldots, c_m)$ според основната лема получаваме, че векторите $a_1, \ldots, a_n$ са линейно зависими. Но това е невъзможно, т.к. те образуват базис. Следователно остава единствено възможността $m = n$ и B съдържа точно n на брой вектора. $\square$

Нека V е крайномерно ненулево пространство. *Размерност* на V наричаме броя на векторите в кой да е базис на V. Ако V има размерност n като линейно пространство над поле F, то записваме $\dim_F V = n$ или накратко $\dim V = n$, ако F се подразбира. Ясно е, че $\dim V \in \mathbb{N}$. В останалите случаи: ако V е безкрайномерно пишем $\dim V = \infty$; ако $V = \{o\}$ записваме $\dim V = 0$.

В примерите: $e_1, e_2, \ldots, e_n$ е базис на F^n и следователно $\dim F^n = n$. В пространството на полиномите от степен $\leq n$ $F^{n+1}[x]$, базисът е $1, x, \ldots, x^n$ и така $\dim F^{n+1}[x] = n + 1$. Както видяхме, $F[x]$ е безкрайномерно пространство и $\dim F[x] = \infty$.

Теорема. *а) V е крайномерно и $\dim V = n \Leftrightarrow$ в V има n на брой линейно независими вектора и всеки $n+1$ вектора са линейно зависими. (С други думи n е максималният брой линейно независими вектора в V.) При това, всеки n на брой линейно независими вектора в V образуват негов базис.*
б) V е безкрайномерно $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ в V има n линейно независими вектора. (Т.е. в V има безброй много линейно независими вектора).

Доказателство а). $\Rightarrow$) Нека $\dim V = n$ и $a_1, \ldots, a_n$ е базис на V. Нека още $b_1, \ldots, b_{n+1} \in V$ са произволни векотри. Тогава $b_1, \ldots, b_{n+1} \in \ell(a_1, \ldots, a_n)$ и $n+1 > n$ и от основната лема следва, че векторите $b_1, \ldots, b_{n+1}$ са линейно зависими.
$\Leftarrow$) Нека $c_1, \ldots, c_n \in V$ са линейно независими и всеки $n + 1$ вектора в V са линейно зависими. Да допуснем, че $\ell(c_1, \ldots, c_n) \subsetneq V$. Тогава съществува вектор $c \in V, c \notin \ell(a_1, \ldots, a_n)$. Така векторите $c_1, \ldots, c_n, c$ са линейно независими и са $n + 1$ на брой, което е противоречие. Следователно $\ell(c_1, \ldots, c_n) = V$ и в допълнение с линейната им независимост

достигаме до извода, че те образуват базис на V.
Нека сега $\dim V = n$ и $e_1, {}_2, \dots, e_n \in V$ са произволни линейно независими вектори. Нека $v \in V$ е друг произволен вектор. Ако $v \notin \ell(e_1, \dots, e_n)$, то $e_1, \dots, e_n, v$ са линейно независими и са $n+1$ на брой, което е невъзможно понеже $\dim V = n$. Следователно остава единствено $v \in \ell(e_1, \dots, e_n)$, което означава, че $\ell(e_1, \dots, e_n) = V$, а оттук може да заключим, че $e_1, \dots, e_n$ е базис на V. $\square$

Нека $\dim V = n$ и $e_1, e_2, \dots, e_n$ е базис. За всеки вектор $v \in V \quad \exists$ числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$, такива че $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. Освен това $n-$торката $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ е единствена: ако $\mu_1, \dots, \mu_n \in F$ и $v = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$, то след като извадим второто равенство от първото получаваме

$$o = (\lambda_1 - \mu_1)e_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)e_n.$$

Но $e_1, \dots, e_n$ са линейно независими, понеже са базис и $(\lambda_1 - \mu_1) = \dots = (\lambda_n - \mu_n) = 0$, т.е. $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n$. Числата $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ се наричат *координати* на вектора v спрямо базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Твърдение 2. *Нека* $\dim V = n$ *и* $b_1, \dots, b_k \in V$ *са линейно независими вектори* $(1 \le k \le n)$*. Тогава (при* $k < n$*)* $\exists$ *вектори* $b_{k+1}, \dots, b_n \in V$: $b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n$ *са базис на* V*.*

Доказателство. Ако $\ell(b_1, \dots, b_k) = V$, то $b_1, \dots, b_k$ е базис на V и $k = n$. Нека сега $\ell(b_1, \dots, b_k) \subsetneq V$. Тогава $\exists$ вектор $b_{k+1} \in V, b_{k+1} \notin \ell(b_1, \dots, b_k)$ и при това $b_1, \dots, b_k, b_{k+1}$ са линейно независими. Ако $\ell(b_1, \dots, b_k, b_{k+1}) = V$, то $b_1, \dots, b_k, b_{k+1}$ е базис. Ако $\ell(b_1, \dots, b_k, b_{k+1}) \subsetneq V$, то $\exists b_{k+2} \in V, bk+2 \notin \ell(b_1, \dots, b_k, b_{k+1})$ и $b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, b_{k+2}$ са линейно независими. След $n-k$ такива стъпки получаваме векторите $b_k, b_{k+1}, \dots, b_n \in V$, такива че системата от n на брой вектори $b_1, \dots, b_n$ е линейно независима. Понеже $\dim V = n$, то $b_1, \dots, b_n$ е базис на V. $\square$

Твърдение 3. *Нека* $\dim V = n$ *и* $U \le V$*. Тогава* U *също е крайномерно пространство и* $\dim U \le n$*. При това* $\dim U = n \Leftrightarrow U = V$*.*

Доказателство. Т.к. $\dim V = n$, то в V има точно n на брой линейно независими вектора. Тогава в U може да има най-много n на брой линейно независими вектора и според теоремата оттук следва, че $\dim U \le n$. Ако $U = V$, то $\dim U = \dim V = n$. Обратно, нека $\dim U = n$ и нека $u_1, \dots, u_n$

е базис на U. $u_1, \dots, u_n$ са n на брой линейно независими вектора в линейното пространство V с размерност n и като такива образуват негов базис. Така от една страна $U \leq V$, а от друга $V = \ell(u_1, \dots, u_n)$ и $V \leq U$. Следователно $U = V$. $\square$