Линейни пространства.

Нека F е числово поле, а V е някакво непразно множество. Нека в V са въведени следните две операции: $\forall a, b \in V$ е съпоставен $a + b \in V$ (събиране); $\forall a \in V, \forall \lambda \in F$ е съпоставен $\lambda a \in V$ (умножение с число). Казваме, че V е *линейно пространство* над F, ако са изпълнени следните осем аксиоми:
1) $a + b = b + a, \quad \forall a, b \in V$ (комутативност при събиране),
2) $(a + b) + c = a + (b + c), \quad \forall a, b, c \in V$ (асоциативност при събиране),
3) $\exists$ елемент $o \in V : a + o = o + a = a, \quad \forall a \in V$ (нулев елемент),
4) $\forall a \in V \exists$ елемент $-a : a + (-a) = (-a) + a = o$ (противоположен елемент),
5) $1.a = a, \quad \forall a \in V, 1 \in F$,
6) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a, \quad \forall a \in V, \lambda, \mu \in F$ (дистрибутивност относно множител от V),
7) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b, \quad \forall a, b \in V, \lambda \in F$ (дистрибутивност относно множител от F),
8) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a, \quad \forall a \in V, \lambda, \mu \in F$.

Елементите на V се наричат още *вектори*, а тези от F – *скалари*.

Примери:

1. Нека F е поле, а $m, n \in \mathbb{N}$. Тогава $F_{m\times n}$ – множеството от всички $m \times n$ матрици с елементи от F, е линейно пространство над F. Наистина, по-рано видяхме, че за произволни $A, B \in F_{m\times n}, \lambda \in F$, с дефинирани $A + B \in F_{m\times n}$ и $\lambda A \in F_{m\times n}$, са изпълнени аксиомите 1)–8).
2. Нека F е поле, а $n \in \mathbb{N}$. $F^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in F\}$ е множеството от всички наредени n-торки чила от F. За $a = (a_1, \ldots, a_n) \in F^n, b = (b_1, \ldots, b_n) \in F^n, \lambda \in F$ дефинираме: $a + b = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n); \quad \lambda a = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$. Ясно е, че $a + b, \lambda a \in F^n$ и директно се проверява, че осемте аксиоми са изпълнени с нулев вектор $o = (0, \ldots, 0)$ и вектор

$-a = (-a_1, \dots, -a_n)$, който е противоположен на a. Така F^n е линейно пространство над F.
3. Нека F е поле. $F[x]$ е множеството от всички полиноми с коефициенти от F. От познатите действия за събиране на полиноми и умножение на полином с число следва, че $F[x]$ е линейно пространство над F. Това твърение остава в сила и ако разгледаме множеството $F^{n+1}[x]$ на всички полиноми със степен $\leq n$. Това се дължи на факта, че както умножението на полином с число, така и събирането на полиноми, водят до получаване на полином със степен не по-висока от тези на изходните.

Следствия от аксиомите:

a) Нулевият вектор е единствен. Наистина, ако $o' \in V$ е такъв, че $a + o' = a, \forall a \in V$, то при $a = o$ имаме $o + o' = o$. От аксиома 3) имаме, че $a + o = a$ и при $a = o'$ получаваме $o' + o = o'$. Но от аксиома 1) $o + o' = o' + o$, откъето слева, че $o' = o$.
b) За всеки вектор $a \in V$ векторът $-a$ е единствен. Това иректно слева от еинствеността на нулевия вектор.
c) $0. = , \forall a \in V$. Наистина, използвайки аксиомите получаваме:

$$a = 1.a = (1+0)a = 1.a + 0.a = a + 0.a.$$

Прибавяме $-a$ към двете страни на уравнението и получаваме последователно

$$\begin{aligned} a - a &= -a + (a + 0.a), \\ o &= (-a + a) + 0.a, \\ o &= o + 0.a, \\ o &= 0.a. \end{aligned}$$

d) $\lambda o = o, \forall \lambda \in F$. Следва от аксиома 8) при $\mu = 0$ и от следствие c).
e) $(-1).a = -a, \quad \forall a \in V$.
f) Ако $a, b \in V$, то $\exists!$ вектор $x \in V : a + x = b$. Това е векторът $x = b + (-a)$, който означаваме с $b - a$ и наричаме разлика на b и a.
g) Ако $a \in V, \lambda \in F$, то $\lambda a = o \Leftrightarrow \lambda = 0$ или $a = o$. Наистина, ако $\lambda = 0$, това очевидно е вярно. Нека $\lambda \neq 0$. Умножаваме двете страни на

равентвото с $\dfrac{1}{\lambda}$ и последователно получаваме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}(\lambda.a) &= \frac{1}{\lambda}.o, \\ \left(\frac{1}{\lambda}.\lambda\right) a &= o, \\ 1.a &= o, \\ a &= o. \end{aligned}$$

Нека V е линейно пространство над F и $U \subseteq V, U \neq \varnothing$. U е *подпространство* на линейното пространтво V, ако е изпълнено: $\forall a, b \in U \Rightarrow a + b \in U$ и $\forall a \in U, \forall \lambda \in F \Rightarrow \lambda a \in U$. (Еквивалентно е да искаме $\forall a, b \in U, \forall \lambda, \mu \in F \Rightarrow \lambda a + \mu b \in U$). Означаваме $U \leq V$ или $U < V$, в зависимост от това дали включването на U в V като негово подмножество е нестрого или строго. От дефиницията следва, че, ако $a \in U$, то $(-1)a = -a \in U$, а оттам и $o \in U$. Веднага е вижда, че подпространството U също е линейно пространство над F относно операциите в V. Тривиалните подпространства на V са $V \leq V$ и нулевото подпространство $\{o\} \leq V$. Ако $V_1 \leq V$ и $V_2 \leq V$, то $V_1 \cap V_2 \leq V$. По-общо, ако $V_i \leq V$ за $i \in I$, където I е някакво множество от индекси, то $\bigcap_{i \in I} V_i \leq V$.

Нека A е някаква система вектори в V или с други думи някакво подмножество $A \subseteq V$. С $\ell(A)$ означаваме сечението от всички подпространства на V, съдържащи A, т.е.

$$\ell(A) = \bigcap_{U \leq V, U \supseteq A} U.$$

По този начин $\ell(A) \leq V, \ell(A) \supseteq A$ и $\ell(A)$ е най-малкото подпространство на V, съдържащо A, т.е. ако $U \leq V$ и $U \supseteq A$, то $U \supseteq \ell(A)$. $\ell(A)$се нарича *линейна обвивка* на системата вектори A. Очевидно $\ell(A) = A \Leftrightarrow A \leq V$.

Ако $1 \leq k < \infty$, $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in F$, векторът $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k \in V$ се нарича *линейна комбинация* на $a_1, a_2, \dots, a_k$.

Твърдение.

$$\ell(A) = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k | k \in \mathbb{N}, a_i \in A, \lambda_i \in F\}$$

(Т.е. линейната обвивка на A се състои от всевъзможните линейни комбинации на векотрите от A.)

Доказатеслство. Нека означим $M = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k | k \in \mathbb{N}, a_i \in A, \lambda_i \in F\}$. Ще докажем поледователно, че $M \subseteq \ell(A)$ и $\ell(A) \subseteq M$, откъдето твърдението ще бъде доказано. Първо, ако $a_1, \ldots, a_k \in A \Rightarrow a_1, \ldots, a_k \in \ell(A)$. Знаем, че $\ell(A) \leq V \Rightarrow \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F$ имаме, че $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k \in \ell(A)$. Но това доказва, че всеки елемент от M принадлежи на $\ell(A)$, т.е. $M \subseteq \ell(A)$. Второ, M е подпространство на V, защото за произволни $a, b \in M, \lambda, \mu \in F$ имаме: a може да се представи като $a = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$ за някакви вектори $a_i \in A$ и някакви скалари $\lambda_i \in F, i = 1, \ldots, k$. Аналогично $b = \mu_1 b_1 + \cdots + \mu_l b_l$ за $b_j \in M, \mu_j \in F, j = 1, \ldots, l$. Сега, $\lambda a + \mu b = \lambda\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda\lambda_k a_k + \mu\mu_1 b_1 + \cdots + \mu\mu_l b_l$. По този начин $\lambda a + \mu b \in M$ и $M \leq V$. За всеки векотр $a \in A$ е в сила $a = 1.a$ и следователно $M \supseteq A$. Но така $M \leq V$ и $M \supseteq A$. Следователно $M \supseteq \ell(A)$. С това всичко е доказано. □

Нека $a_1, \ldots, a_k \in V$ е крайна система вектори.
Казваме, че системата вектори е *линейно зависима*, ако съществуват числа $\lambda_1, \ldots \lambda_k \in F$, не всички равни на 0, такива че $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = o$. Системата се нарича *линейно независима*, ако равенството $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = o$ е възможно само при $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Примери:
1. В пространството F^n векторите $e_1(1, 0, \ldots, 0), e_2(0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n(0, 0, \ldots, 1)$ са линейно независими. Наистина, нека $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$. Тогава $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots \lambda_n e_n = o$ означава, че $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (0, 0 \ldots, 0)$, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

2. В пространството $F^{n+1}[x]$ векторите $1, x, x^2, \ldots, x^n$ образуват линейно независима система. Наистина, ако $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ са такива, че полиномът $\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n$ да се анулира за всяко $x \in F$, то следва, че този полином е тъждествено нулевият и $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Свойства:
(i) Един вектор $a \in V$ е линейно зависим, точно тогава, когато $a = o$. Наистина, нека $\lambda \in F, \lambda \neq 0$ и $\lambda a = o$. Тогава от следствие g) от аксиомите следва, че $a = o$.
(ii) Подсистема на линейно независима система също е линейно независима система. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ е такава линейно независима система, а $a_1, a_2, \ldots, a_s$ е нейна подсистема $(1 \leq s \leq n)$. Нека $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in F$ са такива, че $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_s a_s = o$. Това също можем да запишем и като

$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_s a_s + 0.a_{s+1} + \cdots + 0.a_n = o$. Тъй като отначало $a_1, \ldots, a_n$ бяха линейно независими, имаме че $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$, а оттук следва, че подсистемата $a_1, \ldots, a_s$ също е линейно независима.
(iii) Система вектори, съдържаща o или два вектора от вида $\lambda a, \mu a$ (където $a \in V, \lambda, \mu \in F$) е линейно зависима. Наистина, ако допуснем, че една линейно независима система съдържа нулевия вектор, се достига до противоречие със свойство (ii), т.к. o образува линейно зависима подсистема. За втория случай имаме, че $\mu(\lambda a)+(-\lambda)(\mu a) = o$. С други думи, векторите λa и μa образуват линейно зависима система и всяка система, която ги съдържа като подсистема ще бъде също линейно зависима.
(iv) Една система вектори е линейно зависима тогава и само тогава, когато поне един от векторите в нея е линейна комбинация на останалите. Необходимост: нека векторите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са линейно зависими. Тогава $\exists$ числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$ поне едно от които е различно от нула и такива, че $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = o$. Без ограничение може да считаме, че $\lambda_1 \neq 0$. Тогава разделяме линейната комбинация на векторите на λ_1 и получаваме $a_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} a_2 + \cdots + \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1} a_n = o$ или еквивалентно $a_1 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} a_2 - \cdots - \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1} a_n$. Така a_1 е линейна комбинация на останаите вектори.
Достатъчност: Нека без ограничение a_1 е линейна комбинация на останалите вектори, т.е. $a_1 = \mu_2 a_2 + \cdots + \mu_n a_n$. Тогава $\underbrace{1}_{\neq 0} .a_1 - \mu_2 a_2 - \cdots - \mu_n a_n = o$. Това означава, че векторите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са линейно зависими.
(v) Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ са линейно независими вектори. Тогава ако $a \in V$ и $a \notin \ell(a_1, \ldots, a_n)$, то векторите $a_1, a_2, \ldots, a_n, a$ също са линейно независими. Наистина, нека $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda \in F$ са такива, че $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n + \lambda a = o$. Ако допуснем, че $\lambda \neq 0$, то получаваме $a = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda} a_1 - \cdots - \dfrac{\lambda_n}{\lambda}$, т.е. $a \in \ell(a_1, \ldots, a_n)$, което е противоречие. Следователно $\lambda = 0$ и $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = o$. Но започнахме с това, че $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са линейно независими и следователно $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Оттук $a_1, a_2, \ldots, a_n, a$ също са линейно независими.

Нека $A \subseteq V$ е система вектори (може и безкрайна). Казваме, че системата A е линейно независима, ако <u>всяка</u> крайна подсистема на A е линейно независима. Съответно, A е линейно зависима, ако <u>поне една</u> крайна подсистема на A е линейно зависима. Например в линейното пространство $F[x]$ безкрайната система вектори $1, x, \ldots, x^n, \ldots$ е линейно независима.

Основна лема. *Нека* $a_1, \ldots, a_n \in V, b_1, \ldots, b_k \in V$ *и* $b_1, \ldots, b_k \in \ell(a_1, \ldots, a_n)$. *Ако* $k > n$, *то* $b_1, \ldots, b_k$ *са линейно зависими вектори.*

Доказателство. С индукция по n. Основа на индукцията: $n = 1$и съответно $k \geq 2$. В такъв случай $b_1 = \lambda_1 a_1, \ldots, b_k = \lambda_k a_1$ за някакви скалари $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F$. От свойство (iii) следва, че $b_1, \ldots, b_k$ са линейно зависими. Индукционно предположение: нека $n \geq 2$ и твърдението е вярно за $n-1$. Индукционна стъпка: ще докажем, че твърдението е в сила и за n. Ако някой от векторите $b_1, b_2, \ldots, b_k$ е нулевият вектор, то следствие (iii) дава, че $b_1, \ldots, b_k$ са линейно зависима система. Нека сега $b_i \neq o, \forall i = 1, 2, \ldots, k$. Тогава имаме

$$\begin{aligned} b_1 &= \lambda_{11} a_1 + \lambda_{21} a_2 + \cdots + \lambda_{n1} a_n, \\ b_2 &= \lambda_{12} a_1 + \lambda_{22} a_2 + \cdots + \lambda_{n2} a_n, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ b_k &= \lambda_{1k} a_1 + \lambda_{2k} a_2 + \cdots + \lambda_{nk} a_n \end{aligned}$$

за някакви числа $\lambda_{ij} \in F$. Понеже $b_k \neq o$, то поне едно от числата $\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \ldots, \lambda_{nk}$ е различно от нула. Нека без ограничение $\lambda_{nk} \neq 0$. Умножаваме последвателно последното уравнение с $-\dfrac{\lambda_{ni}}{\lambda_{nk}}$ и го прибавяме към $i-$тото уравнение за $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Така получаваме

$$\begin{aligned} b_1 - \frac{\lambda_{n1}}{\lambda_{nk}} b_k &= \mu_{11} a_1 + \cdots + \mu_{n-1,1} a_{n-1}, \\ b_2 - \frac{\lambda_{n2}}{\lambda_{nk}} b_k &= \mu_{21} a_1 + \cdots + \mu_{n-1,2} a_{n-1}, \\ &\ldots \\ b_{k-1} - \frac{\lambda_{n,k-1}}{\lambda nk} b_k &= \mu_{k-1,1} a_1 + \cdots + \mu_{n-1,k-1} a_{n-1}. \end{aligned}$$

Означаваме $c_1 = b_1 - \dfrac{\lambda_{n1}}{\lambda_{nk}} b_k, \ldots, c_{k-1} = b_{k-1} - \dfrac{\lambda_{n,k-1}}{\lambda_{nk}} b_k$. Разглеждаме системите $a_1, \ldots, a_{n-1}$ и $c_1, \ldots, c_{k-1}$. Очевидно $c_1, \ldots, c_{k-1} \in \ell(a_1, \ldots, a_{n-1})$ и от $k > n$ следва, че $k-1 > n-1$. Според индукционното предположение $c_1, \ldots, c_{k-1}$ са линейно зависими. В такъв случай съществуват числа $\nu_1, \ldots, \nu_{k-1} \in F$ не всички равни на 0, такива че $\nu_1 c_1 + \cdots + \nu_{k-1} c_{k-1} = o$.

Следователно $\nu_1 \left(b_1 - \dfrac{\lambda_{n1}}{\lambda_{nk}} b_k \right) + \cdots + \nu_{k-1} \left(b_{k-1} - \dfrac{\lambda_{n,k-1}}{\lambda_{nk}} b_k \right) = o$, откъдето след разкриване на скобите получаваме

$$\nu_1 b_1 + \cdots + \nu_{k-1} b_{k-1} + * b_k = o,$$

където $*$ е някакъв скалар от F. Но поне един от коефициентите в тази линейна комбинация е различен от нула и следователно векторите $b_1, b_2, \ldots, b_k$ са линейно зависими. От принципа на математическата индукция следва, че лемата е доказана.

$\square$