Основни свойства на детерминантите

Нека с $\Delta = |a_{ij}|, i, j = 1, 2, \ldots, n$ означим детерминантата от ред n. Имайки предвид теоремата от миналата глава, според която $\det A = \det A^t$, следните осем свойства ще останат в сила, ако думата „ред“ се замени с думата „стълб“.

Свойство 1: Ако някой ред на детрминантата, например p-тия ред, се състои само от нули, то $\Delta = 0$. Наистина, нека $a_{p1} = a_{p2} = \cdots = a_{pn} = 0$. По определението за детерминанта имаме, че

$$\Delta = \sum (-1)^{[i_1 \ i_2 \ \ldots \ i_n]} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots \underbrace{a_{pi_p}}_{=0} \ldots a_{ni_n} = 0.$$

Иначе казано, т.к. всяко събираемо от развитието на Δ съдържа като множител по един нулев елемент от p-тия ред, то всеки такъв член се анулира и детерминантата се превръща в сума на нули.

Свойство 2: Нека за произволен p-ти ред $(1 \le p \le n)$ на Δ имаме $a_{p1} = a'_{p1} + a''_{p1}, \ldots a_{pn} = a'pn + a''_{pn}$, т.е. сме представили всеки елемент от p-тия ред на детерминантата като сума на две числа и имаме

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a'_{p1} + a''_{p1} & \ldots & a'_{pk} + a''_{pk} & \ldots & a'_{pn} + a''_{pn} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

то $\Delta = \Delta' + \Delta''$, където

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a'_{p1} & \dots & a'_{pk} & \dots & a'_{pn} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta'' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a''_{p1} & \dots & a''_{pk} & \dots & a''_{pn} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Наистина,

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum (-1)^{[i_1\ i_2\ \dots\ i_n]} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{pi_p} \dots a_{ni_n} \\ &= \sum (-1)^{[i_1\ i_2\ \dots\ i_n]} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots (a'_{pi_p} + a''_{pi_p}) \dots a_{ni_n} \\ &= \sum (-1)^{[i_1\ i_2\ \dots\ i_n]} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a'_{pi_p} \dots a_{ni_n} + \sum (-1)^{[i_1\ i_2\ \dots\ i_n]} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a''_{pi_p} \dots a_{ni_n} \\ &= \Delta' + \Delta''. \end{aligned}$$

Свойство 3: Ако за произволен ред на детерминантата, например p-тия ред, имаме че всеки елемент от него е умножен с едно и също число λ, то имаме

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{p1} & \dots & \lambda a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda\Delta.$$

Действително, имаме

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum (-1)^{[i_1\ i_2\ \dots\ i_n]} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots (\lambda a_{pi_p}) \dots a_{ni_n} \\ &= \lambda \sum (-1)^{[i_1\ i_2\ \dots\ i_n]} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{pi_p} \dots a_{ni_n} = \lambda\Delta. \end{aligned}$$

Свойство 4: Нека сега редът на детерминантата е $n \geq 2$ и за произволни $p, q : 1 \leq p, q \leq n, p \neq q$ е в сила, че p-тия и q-тия ред са равни, т.е. имаме, че $a_{p1} = a_{q1}, \dots, a_{pn} = a_{qn}$. Тогава $\Delta = 0$.

Наистина, кой да е член от развитието на Δ има вида
(∗) $(-1)^{[i_1\ \dots\ i_p\ \dots\ i_q\ \dots\ i_n]} a_{1i_1} \dots a_{pi_p} \dots a_{qi_q} \dots a_{ni_n}$. Друг член от развитието е

$(**) \qquad (-1)^{[i_1\ \cdots\ i_q\ \cdots\ i_p\ \cdots\ i_n]} a_{1i_1} \ldots a_{pi_q} \ldots a_{qi_p} \ldots a_{ni_n}$, получен чрез транспозицията $p \leftrightarrow q$. От Лемата за пермутациите от Глава 2 имаме, че $(-1)^{[i_1\ \cdots\ i_p\ \cdots\ i_q\ \cdots\ i_n]} = -(-1)^{[i_1\ \cdots\ i_q\ \cdots\ i_p\ \cdots\ i_n]}$. Освен това $a_{pk} = a_{qk} \forall k = 1, 2, \ldots, n$ и по този начин получаваме, че $a_{1i_1} \ldots a_{pi_q} \ldots a_{qi_p} \ldots a_{ni_n} = a_{1i_1} \ldots a_{qi_q} \ldots a_{pi_p} \ldots a_{ni_n} = -a_{1i_1} \ldots a_{pi_p} \ldots a_{qi_q} \ldots a_{ni_n}$ или записано накратко $(**) = -(*) \Leftrightarrow (*) + (**) = 0$. По този начин Δ се разбива на $\frac{n!}{2}$ на брой двойки събираеми от вида $(*)$ и $(**)$, като сбора на числата на всяка такава двойка е нула. Следователно $\Delta = 0$.

Свойство 5: Нека $n \geq 2$. Ако за някои p и q, такива че $p \neq q$ имаме $a_{p1} = \lambda a_{q1}, \ldots, a_{pn} = \lambda a_{qn}$, където λ е произволно число, то $\Delta = 0$. С други думи, ако два от редовете на Δ са пропорционални, то $\Delta = 0$.

Имаме

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{q1} & a_{q2} & \ldots & a_{qn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda a_{q1} & \lambda a_{q2} & \ldots & \lambda a_{qn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{q1} & a_{q2} & \ldots & a_{qn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Св. 3}}{=} \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{q1} & a_{q2} & \ldots & a_{qn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{q1} & a_{q2} & \ldots & a_{qn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \stackrel{\text{Св. 4}}{=} \lambda.0 = 0.$$

Свойство 6: Нека $n \geq 2$. Ако към един ред на детерминантата прибавим друг неин ред, умножен с произволно число, стойността й не се променя.

Наистина, нека към p-тия ред на Δ прибавим q-тия ред $(p \neq q)$, умножен по λ. Имаме

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1}+\lambda a_{q1} & a_{p2}+\lambda a_{q2} & \dots & a_{pn}+\lambda a_{qn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{Св. 2}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{q1} & \lambda a_{q2} & \dots & \lambda a_{qn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Св. 5}}{=} \Delta + 0 = \Delta.$$

<u>Свойство 7</u>: Нека $n \geq 2$. Ако в една детерминанта разменим местата на два различни реда p и q, $p \neq q$, то тя си сменя само знака. Нека сме извършили тази промяна в Δ. Тогава имаме

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{Св. 6 } (\lambda=1)}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q1}+a_{p1} & a_{q2}+a_{p2} & \dots & a_{qn}+a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Св. 6 } (\lambda=-1)}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q1}+a_{p1} & a_{q2}+a_{p2} & \dots & a_{qn}+a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{q1} & -a_{q2} & \dots & -a_{qn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{Св. 6 } (\lambda=1)}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{q1} & -a_{q2} & \dots & -a_{qn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Св. 3}}{=} (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\Delta.$$

<u>Свойство 8</u>: Ако имаме, че $a_{pk} = \lambda_1 a_{1k} + \dots + \lambda_{p-1} a_{p-1,k} + \lambda_{p+1} a_{p+1,k} +$

$\dots + \lambda_n a_{nk}$ за $\forall k = 1, \dots, n$, където $\lambda_i, i = 1, \dots p-1, p+1, \dots, n$ са произволни числа[1], то $\Delta = 0$.

Действително, в този случай, според Свойство 2, Δ се разпада на сума от $n-1$ нови детерминанти, всяка от които има два пропорционални реда и е равна на нула според Свойство 5. Следователно $\Delta = 0$.

[1]В такъв случай казваме, че p-тият ред е *линейна комбинация* на останалите редове.