Детерминанти. Транспонирана детерминанта.

Пермутации

Нека имаме естественото число $n \in \mathbb{N}$. Под *пермутция* на числата $1, 2, \dots, n$ ще разбираме същите тези числа, записани в някакъв определен ред. Например при $n = 3$ всички пермутации на числата $1, 2, 3$ са:

$$123, \quad 132, \quad 213, \quad 231, \quad 312, \quad 321.$$

Ще означаваме пермутациите по следния начин: $\sigma = i_1 i_2 \dots i_n$, където всяко $i_k, k = 1, 2, \dots, n$ е точно едно от числата $1, 2, \dots, n$. Не е трудно да се провери, че броят на всички пермутации на $1, 2, \dots, n$ е равен на $n! = n(n-1)\dots 2.1$. Пермутацията $\sigma = 1\ 2\ \dots\ n{-}1\ n$ се нарича *главна пермутация*.

Нека имаме пермутацията $\sigma = i_1 \dots i_k \dots i_s \dots i_n$. Ще казваме, че числта i_k и i_s от нея образуват *инверсия*, ако $k < s$, но $i_k > i_s$. Например в пермутацията $\sigma = 132$ числата 3 и 2 образуват инверсия, защото 3 се намира преди 2, но $3 > 2$. Ясно е, че в главната пермутация няма инверсии. Броят на всички инверсии в дадена пермутация се означава с $[\sigma]$ (или с $[i_1 i_2 \dots i_n]$). Пермутацията σ се нарича *четна* (*нечетна*), ако броят на инверсиите в нея $[\sigma]$ е четно (нечетно) число. Например: в главната пермутация няма инверсии, т.е. $[1\ 2 \dots n{-}1\ n] = 0$ и следователно главната пермутация е четна; в пермутацията $\sigma = 3\ 5\ 2\ 1\ 4$ елементът 3 образува инверсии с 2 и 1 (общо 2), елементът 5 образува инверсии с 2, 1 и 4 (общо 3), елементът 2 образува инверсия с 1 (общо 1), а елементите 1 и 4 не образуват никакви инверсии $\Rightarrow [\sigma] = [3\ 5\ 2\ 1\ 4] = 2 + 3 + 1 + 0 + 0 = 6$ и пермутацията σ е четна; ако вземем главната пермутация в обратен ред имаме $[n\ n{-}1 \dots 2\ 1] = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{(n-1)n}{2}$.

Нека разгледаме пермутацията $\sigma = i_1 \dots i_k \dots i_s \dots i_n$ и разменим местата на елементите i_k и i_s. Това действие се нарича *транспозиция*. Получаваме нова пермутация $\tau = i_1 \dots i_s \dots i_k \dots i_n$, за която казваме, че е получена от σ чрез транспозицията $i_k \leftrightarrow i_s$.

Лема. *Извършването на транспозиция променя четността на всяка пермутация.*

Доказателство. Нека $\sigma = A\ i\ k_1\ k_2 \dots k_t\ j\ B$, в която i и j са елементите, които ще участват в транспозицията, A са всички числа, които стоят преди i, B са всички числа, които стоят след j, а $k_1, k_2, \dots k_t$ са t на брой $(t \geq 0)$ числа, които се намират между i и j. Извършваме транспозицията $i \leftrightarrow j$ и получаваме нова пермутация $\tau = A\ j\ k_1\ k_2 \dots k_t\ i\ B$.
Частен случай: $t = 0$. Тогава пермутациите имат вида $\sigma = A\ i\ j\ B$ и $\tau = A\ j\ i\ B$. Ако $i < j$, то i и j не образуват инверсия в σ, но образуват допълнителна инверсия в τ и така $[\tau] = [\sigma] + 1$, т.е. τ и σ имат различна четност. Аналогично, ако $j < i$, то i и j образуват инверсия в σ, но не образуват инверсия в τ и така $[\tau] = [\sigma] - 1$, т.е. σ и τ имат различна четност.
Общ случай: $t > 0$. Тогава $\sigma = A\ i\ k_1\ k_2 \dots k_t\ j\ B$ и $\tau = A\ j\ k_1\ k_2 \dots k_t\ i\ B$. В пермутацията σ извършваме последователно следните „съседни“ транспозиции: $i \leftrightarrow k_1, i \leftrightarrow k_2 \dots i \leftrightarrow k_t$ и по този начин достигаме до пермутацията $\sigma' = A\ k_1\ k_2, \dots, k_t\ i\ j\ B$. Тези „съседни“ транспозиции са t на брой и от частния случай знаем, че всяка от тях променя четността на изходната пермутация. Нека сега извършим транспозицията $i \leftrightarrow j$, с което общият брой на „съседните“ транспозиции става $t+1$ и получаваме пермутацията $\sigma'' = A\ k_1\ k_2 \dots k_t\ j\ i\ B$. Сега извършваме още t на брой „съседни“ пермутации $j \leftrightarrow k_t, \dots, j \leftrightarrow k_2, j \leftrightarrow k_1$, за да достигнем до желаната пермутация $\tau = A\ j\ k_1\ k_2 \dots k_t\ i\ B$. Така τ се получава от σ чрез общо $2t + 1$ на брой „съседни“ пермутации, всяка от които променя четността на изходната пермутация. Следователно четността на σ е била променена нечетен $(2t+1)$ брой пъти и σ и τ имат различна четност. $\square$

Следствие. *При $n > 1$ броят на четните пермутации на числата $1, 2, \dots, n$ е равен на броя на нечетните пермутации $\left(= \frac{n!}{2}\right)$.*

Матрици и детерминанти

Нека F е числово поле, а $,m,n \in \mathbb{N}$. *Матрица* с размерност $m \times n$ и елементи от F е правоъгълна таблица от числа с m реда и n стълба:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

където a_{ij} е елементът в i-тия ред и j-тия стълб на матрицата и $a_{ij} \in F$ за $\forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Съкратено пишем още $A = (a_{ij})$. В случая, когато $m = n$, т.е. когато броят на редовете е равен на броят на стълбовете, говорим за квадратна матрица от ред n. Ако имаме квадратна матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то елементите $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуват *главния диагонал* на матрицата A, а елементите $a_{1n}, a2, n-1, \dots, a_{n1}$ образуват *втория диагонал* на матрицата A.

Изучаването на матриците и свойствата им е пряко свързано с изучаването и намирането на решения на системи линейни уравнения. На всяка квадратна матрица от ред n съответстват линейни системи от n уравнения с n неизвестни, като елементите на матрицата съвпадат с коефициентите пред неизвестните в линейната система. Например при $n = 2$ имаме матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и нека на нея й съответства системата от 2 уравнения с 2 неизвестни

$$\left| \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{aligned} \right.$$

където $b_1, b_2 \in F$. Нека намерим решение на системата. За да намерим x_1 ще елиминираме неизвестното x_2 и ще го изразим чрез коефициентите и десните части на системата. Аналогично ще постъпим и при търсенето на решение за x_2. За x_1 : умножаваме първия ред с a_{22}, а втория с $-a_{12}$ и системата се преобразува до

$$\left| \begin{aligned} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 &= b_1a_{22} \\ -a_{21}a_{12}x_1 - a_{22}a_{12}x_2 &= -b_2a_{12}. \end{aligned} \right.$$

Сега, събирайки двете уравнения получаваме

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \tag{1}$$

За да получим линейно уравнение за x_2 повтаряме абсолютно аналогични разсъждения: умножаваме първия ред на системат с $-a_{21}$, а втория с a_{11} и получаваме

$$\left| \begin{aligned} -a_{11}a_{21}x_1 - a_{12}a_{21}x_2 &= -b_1a_{21} \\ a_{21}a_{11}x_1 + a_{22}a_{11}x_2 &= b_2a_{11}, \end{aligned} \right.$$

след което събираме двете уравнения и достигаме до

$$(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \tag{2}$$

Да забележим, че коефициентите пред x_1 и x_2 в (1) и (2) всъщност съвпадат. Означаваме $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Този израз се нарича *детерминанта* на матрицата A (в случая става въпрос за детерминанта от $2^{\text{ри}}$ ред). Други стандартни начини за означаване на детерминантата са $\det A$ и $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Сега, имайки предвид, че $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, можем да запишем израза $b_1a_{22} - b_2a_{21}$ под формата на детерминанта, а именно $b_1a_{22} - b_2a_{21} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta_1$. По този начин уравнение (1) се преобразува до

$$\Delta x_1 = \Delta_1.$$

Аналогично, означавайки $b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_2$, преобразуваме уравнение (2) до

$$\Delta x_2 = \Delta_2.$$

Оттук вече лесно се вижда, че ако $\Delta \neq 0$, то системата има единствено решение и то е $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$.

Детерминантите от <u>втори</u> ред се пресмятат лесно по следното правило: от произведението на елементите по главния диагонал вадим произведението на елементите от втория диагонал на матрицата. Например

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3.2 - 4.(-5) = 6 + 20 = 26.$$

Нека сега разгледаме случая при $n=3$, т.е. имаме матрицата $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$, отговаряща на системата линейни уравнения

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{array}\right.$$

Както преди, ще се опитаме чрез преобразуване на системата да намерим неизвестните x_1, x_2, x_3. За да намерим x_1 умножаваме първото уравнение с $(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$, второто с $(a_{13}a_{33}-a_{12}a_{33})$, а третото с $(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})$. След събиране да трите уравнения получаваме следния израз за x_1 :

$$x_1\underbrace{(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{12}a_{23}a_{31})}_{\Delta}=$$
$$=\underbrace{(b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{13}a_{32}+b_3a_{12}a_{23}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{22}a_{13})}_{\Delta_1}.$$

С подобни пресмятания може да се изведе също и

$$\Delta x_2=\Delta_2,\ \Delta x_3=\Delta_3.$$

Изразът $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{12}a_{23}a_{31}$ е детерминантата на матрицата A, която този път е от трети ред. Означаваме още $\Delta=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$. Забелязваме, че изразът $\Delta_1=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{13}a_{32}+b_3a_{12}a_{23}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{22}a_{13}$ може да се запише като детерминанта по следния начин: $\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$, т.е. се получава от $\det A$ като се замени първия ѝ стълб със стълба от дясната част на системата. По същия начин $\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}$ и $\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3.\end{vmatrix}$ Сега, ако $\Delta\neq 0$, то системата ще има единствено решение, а именно $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}$. Имайки предвид, че

$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31}$ да пресметнем следната детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (2.3.1) + ((-1).4.(-2)) + (0.5.1) - (0.3.(-2)) - (-1.1.1) - (2.4.5)$$
$$= 6 + 8 + 0 - 0 + 1 - 40 = -25.$$

Както видяхме досега решенията на линейните системи от втори и трети ред зависят от детерминантите на съответстващите на системите матрици. Това ни навежда на мисълта, че за да можем да намираме решенията (ако има такива) на произволна система от n уравнения с n неизвестни е достатъчно да можем да пресмятаме детерминантата на матрица от произволен ред n. Преди всичко обаче трябва да потърсим удобна дефиниция за детерминанта от произволен ред. Останалата част от тази глава се занимава именно с този въпрос.

Нека с $F_{m\times n}$ означим множеството от всички $m \times n$ матрици с елементи от полето F $\left(F_{m\times n} = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in F \text{ за } \forall i = 1,\dots,m, j = 1\dots,n\}\right)$. Нека $A = (a_{ij})_{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$ е произволна квадратна матрица от ред n. От опита си досега бихме заключили, че детерминантата на A би трябвало да дефинираме като сумата от всички произведения от вида $a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n}$, където $i_1 i_2 \dots i_n$ е произволна пермутация на числата $1, 2\dots, n$. Например при $n = 2, \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ за членът $a_{1\underline{1}}a_{2\underline{2}}$ пермутацията от вторите индекси е четна, защото $[1\ 2] = 0$. При другият член $a_{1\underline{2}}a_{2\underline{1}}$ пермутацията от вторите индекси е нечетна, защото $[2\ 1] = 1$ и той е взет със знак $-$. Същата връзка между четността на пермутацията на вторите индекси и знакът, с който се взима члена в израза за детерминантата се наблюдава и при детерминантата от трети ред, която разгледахме. Следователно би трябвало членът $a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n}$ да участва в детерминантата със знак $+$, когато пермутацията от вторите индекси $i_1 i_2 \dots i_n$ е четна и със знак $-$, когато пермутацията е нечетна. Накратко записано членът $a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n}$ участва със знак $(-1)^{[i_1 i_2 \dots i_n]}$. Сега вече можем да дадем следната

Дефиниция. *Нека A е квадратна матрица от ред n. Детерминанта на наричаме сумата*

$$\sum (-1)^{[i_1 i_2 \dots i_n]} a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n},$$

взета по всички пермутации $i_1\ i_2 \dots i_n$ *на числата* $1, 2, \dots, n$.

Забележете, че от това, което вече знаем за пермутациите следва, че това е сума от $n!$ на брой събираеми, половината от които са взети със знак $+$, а другата половина със знак $-$. Например при $n = 1$ имаме $A = (a_{11})$ и $\det A = (-1)^{[1]} a_{11} = (-1)^0 a_{11} = a_{11}$. Също така е важно да се отбележи, че от така дадената дефиниция следва, че всеки член от сумата съдържа точно по един елемент от всеки ред и всеки стълб на детерминантата.

Нека разгледаме *триъгълната детерминанта* от ред n $\Delta = |a_{ij}|; i, j = 1, 2, \dots, n$ и $a_{ij} = 0$ при $j > i$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тогава $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$.[1] Наистина, произволен член от развитието на Δ има вида $(-1)^{[i_1\ i_2\ \dots i_n]} a_{1i_1} \dots a_{ki_k} \dots a_{ni_n}$. Ако за някое $k : 1 \le k \le n$ имаме, че $i_k > k$, то $a_{ki_k} = 0$ и цялото събираемо е равно на 0. Остава $i_k \le k\ \forall k = 1, 2, \dots, n$, но това е възможно единствено при $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_n = n$. Следователно $\Delta = (-1)^{[1\ 2\ \dots\ n]} a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Да разгледаме следните примери при $n = 5$:

$a_{21}a_{5\underline{2}}a_{34}a_{1\underline{2}}a_{43}$ не участва в Δ, т.к. вторите му индекси не образуват пермутация на числата от 1 до 5 (числото 2 се повтаря, а числото 5 го няма).

$a_{21}a_{52}a_{34}a_{15}a_{43}$ участва в Δ. При това т.к. $a_{21}a_{52}a_{34}a_{15}a_{43} = a_{1\underline{5}}a_{2\underline{1}}a_{3\underline{4}}a_{4\underline{3}}a_{5\underline{2}}$ и $[5\ 1\ 4\ 3\ 2] = 7$, сибираемото участва със знак „$-$“ в развитието на Δ.

Твърдение. *Ако* $j_1\ j_2 \dots\ j_n$ *и* $k_1\ k_2 \dots\ k_n$ *са две пермутации на* $1, 2, \dots, n$, *то* $a_{j_1k_1}a_{j_2k_2}\dots a_{j_nk_n}$ *участва в* $\det A$ *със знак* $(-1)^{[j_1\ j_2 \dots\ j_n] + [k_1\ k_2 \dots\ k_n]}$.

Доказателство. Нека означим $a_{j_1k_1}a_{j_2k_2}\dots a_{j_nk_n}$ с (1), $j = j_1\ j_2 \dots\ j_n; k = k_1\ k_2 \dots\ k_n$.

Преобразуваме (1) във вида $a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n}$ (2) чрез разместване на $a_{j_pk_p}$ с $a_{j_qk_q}$. Това води до трнспозиция $j_p \leftrightarrow j_q$ в j и транспозиция $k_p \leftrightarrow$

[1] Същото е в сила и ако нулите се намират под главния диагонал.

k_q в k. От Лемата имаме, че числата $[j]$ и $[k]$ едновременно променят четността си, откъдето следва, че сумата им $[j]+[k]$ запазва четността си. Тогава $(-1)^{[1\ 2\ \dots\ n]+[i_1\ i_2\ \dots\ i_n]} = (-1)^{[i_1\ i_2\ \dots\ i_n]}$. По дефиниция (2) участва в $\det A$ със знак $(-1)^{[i_1\ i_2\ \dots\ i_n]}$ и следователно (1) участва в $\det A$ със знак $(-1)^{[j]+[k]} = (-1)^{[j_1\ j_2 \dots\ j_n]+[k_1\ k_2 \dots\ k_n]}$. □

Нека

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in F_{m\times n},$$

където с $F_{m\times n}$ е означено множеството от всички $m \times n$ матрици с елементи от полето F. Тогава матрицата

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in F_{n\times m}$$

се нарича *транспонирана* на матрицата A. Стълбовете на A^t са редовете на A, а редовете на A^t са стълбовете на A. За транспонираната матрица A^t може още да се мисли, че е получена от A чрез „завъртне“ спрямо главния диагонал. Очевидно е свойството $(A^t)^t = A$.

Теорема. *За всяка квадратна матрица A е в сила* $\det A^t = \det A$.

Доказателство. Нека $A = (a_{ij})_{n\times n}$ и $A^t = (a_{ji})_{n\times n}$. Всеки член от развитието на $\det A$ има вида $a_{j_1k_1}a_{j_2k_2}\dots a_{j_nk_n}$ и също участва и в развитието на $\det A^t$. Очевидно е в сила и обратното. От твърдението имаме, че този член участва в развитието на $\det A$ със знак $(-1)^{[j_1\ j_2 \dots\ j_n]+[k_1\ k_2 \dots\ k_n]}$, а в развитието на $\det A^t$ със знак $(-1)^{[k_1\ k_2 \dots\ k_n]+[j_1\ j_2 \dots\ j_n]}$. По този начин развитията на $\det A$ и на $\det A^t$ просто съвпадат и следователно $\det A = \det A^t$. □