Евклидови пространства.

Нека V е линейно пространство над полето $\mathbb{R}$. Ще казваме, че в пространството V е въведено *скаларно произведение*, ако на всеки два вектора $x, y \in V$ е съпоставено число $(x, y) \in \mathbb{R}$, така че да са изпълнени следните четири аксиоми:

1. $(x, y) = (y, x) \quad \forall x, y \in V$,
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \quad \forall x, y, z \in V$,
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad \forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
4. $(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in V$ с равенство точно когато $x = o$.

Линейно пространство, в което е въведено скаларно произведение, се нарича *евклидово пространство.*

Примери:

Нека V е множеството от всички свободни вектори, изучавани в Аналитичната геометрия. Известно е, че V е линейно пространство над $\mathbb{R}$ с размерност $\dim V = 3$. Скаларното произведение там е въведено по следния начин:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{cases} 0, \text{ ако } \vec{a} = \vec{0} \text{ или } \vec{b} = \vec{0}, \\ |\vec{a}|.|\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}), \text{ ако } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}. \end{cases}$$

Тогава V е евклидово пространство.

Пространството $\mathbb{R}^n$ от наредените n-торки reареални числа е линейно пространство над $\mathbb{R}$. Дефинираме скаларно произведение на всеки два вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ като

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Директно се установява, че горната формула удовлетворява четирите аксиоми. Така $\mathbb{R}^n$ също е евклидово пространство.

Следствия от аксиомите:

а) $(o, y) = 0$ за $\forall y \in V$. За произволен вектор $x \in V$ представяме

$$(o, y) = (0.x, y) = 0.(x, y) = 0.$$

b)

$$(x, y + z) = (y + z, x) = (y, x) + (z, x) = (x, y) + (x, z)$$

и

$$(x, \lambda y) = (\lambda y, x) = \lambda(y, x) = \lambda(x, y).$$

c) Ако $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k$, а $y = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \cdots + \mu_l y_l$, то

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (x_i, y_j).$$

Чрез скаларното произведение дефинираме числото

$$|x| = \sqrt{(x, x)},$$

наречено *дължина* на вектора $x \in V$. От аксиома 4 е ясно, че $|x| \geq 0$ и $|x| = 0$ точно когато $x = o$. Изпълнено е свойството $|\lambda x| = |\lambda||x|$ за произволно число $\lambda \in \mathbb{R}$. Наистина,

$$|\lambda x| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x, x)} = |\lambda| \sqrt{(x, x)} = |\lambda||x|.$$

Ще казваме, че векторът x е единичен, ако $|x| = 1$. За всеки ненулев вектор може да се намери единичен вектор със същата посока: ако $x \in V$ има дължина $|x| \neq 0$, то векторът $x_0 = \dfrac{1}{|x|} x$ има дължина $|x_0| = \left| \dfrac{1}{|x|} x \right| = \dfrac{1}{|x|} |x| = 1$ и е единичен.

За два вектора $x, y \in V$ казваме че са *ортогонални*, ако $(x, y) = (y, x) = 0$. Бележим $x \perp y$. Т.к. $(o, y) = 0$ за $\forall y \in V$, то $o \perp y$ за $\forall y \in V$. Вярно е и обратното: ако един вектор $x \in V$ е ортогонален на всеки вектор от V, т.е. $(x, y) = 0$ за $\forall y \in V$, то $x = o$, защото при $y = x$ получаваме равенството $(x, x) = 0$, което се изпълнява само от нулевия вектор.

Казваме, че системата вектори $a_1, a_2, \ldots, a_k$ е ортогонална, ако $(a_i, a_j) = 0$ за всеки $1 \leq i, j \leq k$ и $i \neq j$. Ако в допълнение $|a_i| = 1$ за всички $1 \leq i \leq k$, то системата се нарича *ортонормирана*.

Твърдение 1. *Всяка ортогонална система от ненулеви вектори е линейно независима.*

Доказателство. Нека векторите $a_1, a_2, \dots, a_k$ са ненулеви и $(a_i, a_j) = 0$ при $i \neq j$. Да допуснем, че

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = o$$

за числа $\lambda_i \in \mathbb{R}$. За кое да е $i : 1 \le i \le k$ умножаваме скаларно двете страни на горното равенство с a_i и получаваме

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k, a_i) = (o, a_i),$$

$$\lambda_1 \underbrace{(a_1, a_i)}_{=0} + \dots + \lambda_i \underbrace{(a_i, a_i)}_{\neq 0} + \dots + \lambda_k \underbrace{(a_k, a_i)}_{=0} = 0.$$

Следователно $\lambda_i \underbrace{(a_i, a_i)}_{\neq 0} = 0$, което дава $\lambda_i = 0$ за $1 \le i \le k$, което означава, че векторите $a_1, a_2, \dots, a_k$ са линейно независими. □

Нека размерността на евклидовото пространство V е $\dim V = n$. Тогава, ако $a_1, a_2, \dots, a_n$ е ортогонална система вектори, то според Твърдение 1, те са линейно независими, а оттам следва и че те образуват базис на V. Базисът $e_1, e_2, \dots, e_n$ на V е ортонормиран, ако $|e_i| = 1$ за всяко $i : 1 \le i \le n$ и $(a_i, a_j) = 0$ за всеки $i, j : 1 \le i, j \le n$ и $i \neq j$.

Твърдение 2 (неравенство на Коши-Буняковски). *За всеки два вектора $x, y \in V$ е в сила неравенството*

$$|(x, y)| \le |x|.|y|,$$

наречено неравенство на Коши-Буняковски[1]. *Равенството се достига точно когато векторите x и y са линейно зависими.*

Доказателство. Ако $x = o$, то имаме тривиално изпълнено равенство. Нека $x \neq o$. За произволно число $\lambda \in \mathbb{R}$ разглеждаме вектора $\lambda x - y$. Имаме че

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) \ge 0,$$

$$(x, x)\lambda^2 - 2(x, y)\lambda + (y, y) \ge 0.$$

[1] Известно още и като неравенство на Коши-Буняковски-Шварц

Това е квадратен тричлен спрямо λ със старши коефициент $(x,x) \geq 0$ и този тричлен приема неотрицателни стойности за всяко реално число λ. Следователно дискриминантата D на тричлена трябва да е $D \leq 0$. Това ни дава

$$4(x,y)^2 - 4(x,x)(y,y) \leq 0,$$

$$(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y),$$

$$(x,y)^2 \leq |x|^2|y|^2.$$

И така след коренуване получаваме неравенството на Коши-Буняковски

$$|(x,y)| \leq |x||y|.$$

Равенството $|(x,y)| = |x||y|$ е еквивалентно на анулиране на дискриминантата $D = 0$, което означава, че квадратният тричлен има реален корен λ_0, такъв че $(\lambda_0 x - y, \lambda_0 x - y) = 0$. Това е възможно точно при $\lambda_0 x - y = o$, т.е. при $y = \lambda_0 x$, което означава, че x и y са линейно зависими. $\square$

Следствие (неравенство на триъгълника). *За всеки два вектора $x, y \in V$ е в сила неравенството*

$$|x+y| \leq |x| + |y|,$$

наречено неравенство на триъгълника. Неравенството е строго точно когато x и y са линейно зависими.

Доказателство. Имаме

$$\begin{aligned}|x+y|^2 &= (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \overset{\text{К-Б}}{\leq} (x,x) + 2|x||y| + (y,y) \\ &= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2 .\end{aligned}$$

Оттук следва и че

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Ако x и y са линейно независими, то $(x,y) < |x||y|$ и по веригата $|x+y| < |x| + |y|$. $\square$

Забележка: За два ненулеви вектора $x, y \in V$ неравенството на Коши-Буняковски дава, че

$$-|x||y| \leq (x, y) \leq |x||y|,$$

което е еквивалентно на

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{|x||y|} \leq 1.$$

Това означава, че съществува единствен ъгъл $\alpha \in [0, \pi]$, такъв че $\cos \alpha = \frac{(x, y)}{|x||y|}$. Ъгълът α се нарича ъгъл между векторите x и y и в такъв случай е в сила формулата $(x, y) = \cos \alpha |x||y|$, позната от аналитичната геометрия.