Ранг и дефект на линеен оператор.

Нека V е линейно пространство над поле F, а $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$. Множеството

$$\operatorname{Im}\varphi = \{y \in V | y = \varphi(x) \text{ за някой вектор } x \in V\},$$

състоящо се от образите на всевъзможните вектори $x \in V$ под действието на хомоморфизма φ, се нарича *образ* на φ. Множеството

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in V | \varphi(x) = o\},$$

състоящо се от онези вектори $x \in V$, които хомоморфизмът φ изпраща в нуле вия вектор o, се нарича *ядро* на φ. От свойствата на линейните изображения имаме, че $\varphi(o) = o$ и следователно $\operatorname{Ker}\varphi \neq \varnothing$, т.к. поне нулевият вектор се съдържа в ядрото. $\operatorname{Im}\varphi$ и $\operatorname{Ker}\varphi$ са подпространства на V. Наистина, нека $y_1, y_2 \in \operatorname{Im}\varphi$. Това означава, че съществуват вектори $x_1, x_2 \in V : y_1 = \varphi(x_1)$ и $y_2 = \varphi(x_2)$. Сега имаме

$$y_1 + y_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \varphi(x_1 + x_2)$$

и следователно $y_1 + y_2 \in \operatorname{Im}\varphi$. За произволен скалар $\lambda \in F$ имаме

$$\lambda y_1 = \lambda\varphi(x_1) = \varphi(\lambda x_1)$$

и следователно $\lambda y_1 \in \operatorname{Im}\varphi$. С това $\operatorname{Im}\varphi \leq V$.
Нека сега $x_1, x_2 \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тогава

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) = \varphi(x_2) = o + o = o$$

и следователно $x_1 + x_2 \in \operatorname{Ker}\varphi$. За произволен скалар $\lambda \in F$

$$\varphi(\lambda x_1) = \lambda\varphi(x_1) = \lambda.o = o,$$

което означава, че $\lambda x_1 \in \operatorname{Ker}\varphi$. С това $\operatorname{Ker}\varphi \leq V$.

Уточнение: В общия случай, когато разглеждаме линейно изображение

$$\varphi : V \to V'$$

при $V \neq V'$, т.е. $\varphi \in \operatorname{Hom}(V, V')$, образът и ядрото на φ се дефинират по следния начин:

$$\operatorname{Im}\varphi = \{y \in V' | y = \varphi(x) \text{ за някой вектор } x \in V\} \leq V',$$

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in V | \varphi(x) = o'\} \leq V.$$

Числото $\dim \operatorname{Im}\varphi$ се нарича *ранг* на φ и го бележим с $\mathrm{r}(\varphi)$, а числото $\dim \operatorname{Ker}\varphi$ се нарича *дефект* на φ и го бележим с $\mathrm{d}(\varphi)$.

Примери:

За $\varphi = \mathcal{O}$ имаме, че $\mathcal{O}$ изпраща всеки вектор $x \in V$ в нулевия, защото по дефиниция $\mathcal{O}(x) = o$ за произволен вектор $x \in V$. Тогава $\operatorname{Im}\mathcal{O} = \{o\}$ и $\operatorname{Ker}\mathcal{O} = V$.

За $\varphi = \mathcal{E}$ лесно се вижда, че $\operatorname{Im}\mathcal{E} = V$ и $\operatorname{Ker}\mathcal{E} = \{o\}$.

Нека разгледаме линейното пространство $\mathbb{R}[x]$ на полиномите на една променлива с реални коефициенти. Нека $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ е изображението, за което $\varphi(f(x)) = f'(x)$ за произволен полином $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. От свойствата на производните имаме, че $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ и $(\lambda f(x))' = \lambda f'(x)$ за произволни полиноми $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ и число $\lambda \in F$. Оттук следва, че $\varphi \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}[x])$. $\operatorname{Ker}\varphi$ е множеството, състоящи се от онези полиноми $f(x)$, за които е изпълнено $\varphi(f(x)) = f'(x) = 0$. Ясно е че това е множеството от константните полиноми и тогава $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R}^1$. От правилата за интегриране лесно се съобразява, че всеки полином може да се разглежда като производна на полином от по-висока степен. По този начин $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}[x]$.

Ясно е, че ако V е крайномерно линейно пространство и $\dim V = n$, то за произволен линеен оператор $\varphi \in \operatorname{Hom}(\varphi)$ е в сила $0 \leq \mathrm{r}(\varphi) \leq n$ и $0 \leq \mathrm{d}(\varphi) \leq n$.

Твърдение 1. *Нека $\varphi \in \operatorname{Hom}(V)$ и A е матрицата на φ спрямо кой да е базис на V. Тогава $\mathrm{r}(\varphi) = \operatorname{rank} A$.*

Доказателство. Нека фиксираме произволен базис $e_1, \dots, e_n$ на V. Нека $y \in \operatorname{Im} \varphi$. Тогава $y = \varphi(x)$ за вектор $x \in V$. Нека $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. Тогава $y = \lambda_1 \varphi(e_1) + \cdots + \lambda_n \varphi(e_n)$. Т.к. векторът y е произволно избран, то $\operatorname{Im} \varphi = \ell(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$. Следователно $\mathrm{r}(\varphi) = \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim \ell(\varphi(e_1), \dots \varphi(e_n)) = \operatorname{rank}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) =$ ранга на матрицата със стълбове координатите на $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) = \operatorname{rank} A$. $\square$

Следствие. *Ако A и B са матриците на φ спрямо два базиса на V, то $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$. С други думи числото $\mathrm{r}(\varphi)$ не зависи от базиса.*

Доказателство. Според Твърдение 1 имаме, че $\operatorname{rank} A = \mathrm{r}(\varphi) = \operatorname{rank} B$. $\square$

Теорема 1 (за ранга и дефекта). *Нека V е крайномерно пространство, а $\varphi \in \operatorname{Hom}(V)$ е линеен оператор. Тогава е в сила $\dim \operatorname{Im} \varphi + \dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim V$.*

Доказателство. Нека $\dim V = n$, $\mathrm{r}(\varphi) = \dim \operatorname{Im} \varphi = r$, а $\mathrm{d}(\varphi) = \dim \operatorname{Ker} \varphi = d$. Нека (при предположение, че $\operatorname{Ker} \varphi \neq \{o\}$) векторите $a_1, \dots, a_d$ са базис на $\operatorname{Ker} \varphi$. Т.к. $d \leq n$, то (при $d < n$) съществуват вектори $a_{d+1}, \dots, a_n \in V$, такива че векторите $a_1, \dots, a_d; a_{d+1}, \dots, a_n$ образуват базис на V (при $d = n$ няма нужда от това допълване на базиса). Разглеждаме векторите

$$(*) \quad \varphi(a_{d+1}), \dots, \varphi(a_n),$$

които са $d - n$ на брой. Очевидно векторите $(*)$ принадлежат на подпространството $\operatorname{Im} \varphi$. За произволен вектор $y \in \operatorname{Im} \varphi$ съществува вектор $x \in V$, такъв че $y = \varphi(x)$. Нека

$$x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_d a_d + \lambda_{d+1} a_{d+1} + \cdots + \lambda_n a_n.$$

Тогава имаме, че

$$y = \varphi(x) = \lambda_1 \varphi(a_1) = \cdots + \lambda_d \varphi(a_d) + \lambda_{d+1} \varphi(a_{d+1}) + \cdots + \lambda_n \varphi(a_n),$$

а оттук и

$$y = \lambda_{d+1} \varphi(a_{d+1}) + \cdots + \lambda_n \varphi(a_n),$$

понеже векторите $a_1, \dots, a_d \in \operatorname{Ker} \varphi$. Следователно всеки вектор $y \in \operatorname{Im} \varphi$ е линейна комбинация на векторите $\varphi(a_{d+1}), \dots, \varphi(a_n)$. Ще докажем, че векторите $(*)$ са линейно независими. Да допуснем, че

$$\mu_{d+1} \varphi(a_{d+1}) + \cdots + \mu_n \varphi(a_n) = o$$

за някакви числа $\mu_i \in F$. Това означава, че

$$\varphi(\mu_{d+1}a_{d+1} + \cdots + \mu_n a_n) = o,$$

което е еквивалентно на

$$\mu_{d+1}a_{d+1} + \cdots + \mu_n a_n \in \operatorname{Ker}\varphi.$$

Тогава

$$\mu_{d+1}a_{d+1} + \cdots + \mu_n a_n = \nu_1 a_1 + \cdots + \nu_d a_d$$

или

$$\nu_1 a_1 + \cdots + \nu_n a_n - \mu_{d+1}a_{d+1} - \cdots - \mu_n a_n = o.$$

Т.к. векторите $a_1, \dots, a_d; a_{d+1}, \dots, a_n$ образуват базис на V, то те са линейно независими и трябва $\nu_1 = \cdots = \nu_d = (-\mu_{d+1}) = \cdots = (-\mu_n) = 0$, откъдето следва и че векторите $(*)$ са линейно независими. От казаното дотук следва, че векторите $(*)$ са базис на $\operatorname{Im}\varphi$. Така $r = \dim \operatorname{Im}\varphi = n - d$, т.е. $r + d = n$ или $\mathrm{r}(\varphi) + \mathrm{d}(\varphi) = n$. $\square$

Ще казваме, че линейният оператор $\varphi \in \operatorname{Hom}(V)$ е *обратим*, ако съществува линеен оператор $\psi \in \operatorname{Hom}(V)$, такъв че $\varphi\psi = \psi\varphi = \mathcal{E}$. Нека φ има матрица A, ψ има матрица B. Знаем, че матрицата на $\mathcal{E}$ е единичната матрица E. Т.к. матрицата на $\varphi\psi$ е AB, то получаваме, че $AB = E$, което означава, че матрицата A е обратима (и $\det A \neq 0$). В такъв случай $B = A^{-1}$. Матрицата A^{-1} е единствената с това свойство, а „преведено“ на операторен език това означава, че и операторът ψ е единствен. Означаваме го с φ^{-1}. Ясно е, че при това положение изображенията φ и φ^{-1} са биективни.

Теорема 2. *Нека V е крайномерно линейно пространство с $\dim V = n$, а $\varphi \in \operatorname{Hom}(V)$. Следните условия са еквивалентни:*

1) φ е обратим линеен оператор,

2) матрицата на φ спрямо кой да е базис на V е неособена,

3) $\mathrm{r}(\varphi) = \dim V$, т.е. $\operatorname{Im}\varphi = V$,

4) $\mathrm{d}(\varphi) = 0$, т.е. $\operatorname{Ker}\varphi = \{o\}$,

5) φ преобразува (кой да е) базис на V в (друг) базис на V.

Доказателство. Ще извършим доказателството по схемата 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 2) : Това вече го видяхме по-горе.

2) $\Rightarrow$ 3) : Нека A е матрицата на φ в произволен базис на V. Т.к. A е обратима, то $\det A \neq 0$ и $\operatorname{rank} A = n = \dim V$. Но $\mathrm{r}(\varphi) = \operatorname{rank} A \Rightarrow \mathrm{r}(\varphi) = \dim V$.

3) $\Rightarrow$ 4) : Според Теоремата за ранга и дефекта имаме, че $\mathrm{r}(\varphi)+\mathrm{d}(\varphi) = \dim V$. Сега от $\mathrm{r}(\varphi) = \dim V$ следва, че $\mathrm{d}(\varphi) = 0$.

4) $\Rightarrow$ 3) : Нека $\mathrm{d}(\varphi) = 0$ (т.е. $\operatorname{Ker}\varphi = \{o\}$). Нека $e_1, \dots, e_n$ е базис на V и разгледаме векторите $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \in V$. Да вземем такава линейна комбинация с коефициенти $\lambda_i \in F$, че

$$\lambda_1\varphi(e_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(e_n) = o.$$

От свойствата на линейните изображения преобразуваме горното до

$$\varphi(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = o.$$

Това означава, че векторът

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in \operatorname{Ker}\varphi = \{o\}$$

и единствената възможност е

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = o.$$

Понеже $e_1, \dots, e_n$ са базис и са линейно независими, то $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, а оттук следва и линейната независимост на векторите $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$. Т.к. те са n на брой следва, че те също образуват базис на V.

5) $\Rightarrow$ 1) : Нека $e_1, \dots, e_n$ е базис на V и $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ също е базис на V. Да означим

$$f_1 = \varphi(e_1), \dots, f_n = \varphi(e_n)$$

. Знаем, че съществува единствен линеен оператор $\psi \in \operatorname{Hom}(V)$, такъв че $\psi(f_i) = e_i$ за $\forall i = 1, \dots, n$. Това означава, че $\psi(\varphi(e_i)) = e_i \Leftrightarrow (\psi\varphi)(e_i) = e_i$ за $\forall i = 1, \dots, n$. Т.к. e_i са базисни вектори от последното следва, че $(\psi\varphi)(v) = v$ за $\forall v \in V$, т.е. $\psi\varphi = \mathcal{E}$. По аналогичен начин се вижда и че $\varphi\psi = \mathcal{E}$, т.е. операторът φ е обратим. $\square$