Линейни изображения.

Нека M и M' са множества. Изображение φ от M в M'

$$\varphi : M \to M'$$

е правило, което на всеки елемент $x \in M$ съпоставя единствен елемент $\varphi(x) \in M'$. Казваме, че две изображения φ и ψ съвпадат, ако $\varphi(x) = \psi(x)$ за всяко $x \in M$.

Изображението $\varphi : M \to M'$ е *биекция* (или още *взаимно-еднозначно* изображение), ако $\forall x' \in M'$ съществува елемент $x \in M$, такъв че $\varphi(x) = x'$ и за $\forall x, y \in M$ от $x \neq y$ да следва $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Иначе казано φ е биекция, ако за всеки елемент $x \in M$ съществува единствен елемент $x' \in M'$, такъв че $\varphi(x) = x'$. Ако φ е биекция, то дефинираме обратно изображение

$$\varphi^{-1} : M' \to M$$

с $\varphi^{-1}(x') = x$. В такъв случай φ^{-1} също е биекция, а множествата M и M' се наричат *равномощни*.

Всичко казано по-горе остава в сила и ако вместо произволни множества разглеждаме линейните пространства V и V' над едно и също поле F.

Нека

$$\varphi : V \to V'$$

е изображение. φ е *линейно изображение/хомоморфизъм на линейни пространства*, ако

$$\forall x, y \in V \Rightarrow \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

и

$$\forall x \in V, \forall \lambda \in F \Rightarrow \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x).$$

Горните две изисквания са еквивалентни на

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y) \quad \forall x, y \in V; \forall \lambda, \mu \in F.$$

В случая, когато $V' = V$, т.е. имаме изображението $\varphi : V \to V$, φ се нарича *линеен оператор* на V.

Тривиални примери за линейни оператори са нулевият оператор

$$\mathcal{O} : V \to V,$$

дефиниран с $\mathcal{O}(x) = o$ за $\forall x \in V$, както и идентитетът/единичен оператор

$$\mathcal{E} : V \to V,$$

дефиниран с $\mathcal{E}(x) = x$ за $\forall x \in V$.

Изображението

$$\varphi : F_{n\times n} \to F_{n\times n},$$

дефинирано с $\varphi(A) = A^t$ е линеен оператор. Наистина, това следва от свойствата на транспонирането на матрици: $(A+B)^t = A^t + B^t$ и $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.

Ще означаваме с $\mathrm{Hom}(V, V')$ множеството от всички хомоморфизми от V в V'. Ако $V' = V$, то $\mathrm{Hom}(V)$ е множеството на всички линейни оператори в V.

Свойства на хомоморфизмите $\varphi : V \to V'$:
a) $\varphi(o) = o'$, където o' е нулевият вектор на V'. $\varphi(o) = \varphi(0.o) = 0.\varphi(o) = o'$.
b) $\varphi(-v) = -\varphi(v)$ за $\forall v \in V$.
c) Ако $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ са линейно зависими, то $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \ldots, \varphi(v_k) \in V'$ са линейно зависими. Наистина, нека $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = o$ като поне едно $\lambda_i \neq 0$. Тогава имаме

$$\varphi(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) = \varphi(o),$$

$$\lambda_1 \varphi(v_1) + \cdots + \lambda_k \varphi(v_k) = o',$$

с поне едно $\lambda_i \neq 0$, откъдето следва, че векторите $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k)$ са линейно зависими.

Твърдение 1. *Нека* $\dim V = n$. *За всеки базис* $v_1, \dots, v_n$ *на* V *и за произволни вектори* $v'_1, \dots, v'_n \in V'$ *съществува, при това еднствено линейно изображение* $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V')$, *такова че* $\varphi(v_1) = v'_1, \dots, \varphi(v_n) = v'_n$.

Доказателство. Съществуване: Всеки вектор $x \in V$ се записва еднозначно като $x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, където $\lambda_i \in F$ за $i = \overline{1,n}$. Дефинираме изображение $\varphi : V \to V'$ чрез

$$\varphi(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 v'_1 + \cdots + \lambda_n v'_n.$$

φ е коректно дефинирано и за $j = 1, \dots, n$ имаме, че $\varphi(v_j) = v'_j$, защото

$$\varphi(v_j) = \varphi(0.v_1 + \cdots + 1.v_j + \cdots + 0.v_n) = 0.v'_1 + \cdots + 1.v'_j + \cdots + 0.v'_n = v'_j.$$

φ е линейно изображение, понеже за $\forall x, y \in V : x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, $y = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$ имаме

$$\begin{aligned}
\varphi(x + y) &= \varphi\left((\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n)v_n\right) \\
&= (\lambda_1 + \mu_1)v'_1 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n)v'_n \\
&= (\lambda_1 v'_1 + \cdots + \lambda_n v'_n) + \cdots + (\mu_1 v'_1 + \cdots + \mu_n v'_n) \\
&= \varphi(x) + \varphi(y).
\end{aligned}$$

Директно се проверява и че $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$.
Единственост: Нека $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, V')$ са такива че $\varphi(v_i) = v'_i$ и $\psi(v_i) = v'_i$ за всяко $i = \overline{1,n}$. Нека $x \in V : x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Тогава

$$\varphi(x) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \cdots + \lambda_n \varphi(v_n) = \lambda_1 v'_1 + \cdots + \lambda_n v'_n.$$

Имаме още, че

$$\psi(x) = \lambda_1 \psi(v_1) + \cdots + \lambda_n \psi(v_n) = \lambda_1 v'_1 + \cdots + \lambda_n v'_n.$$

По този начин $\varphi(x) = \psi(x)$ за всяко $x \in V$, т.е. $\varphi = \psi$. □

Изображението

$$\varphi : V \to V'$$

се нарича *изоморфизъм*, ако φ е хомоморфизъм (линейно изображение) и едновременно φ е биекция (взаимно-еднозначно изображение). В такъв случай обратното изображение

$$\varphi^{-1} : V' \to V$$

също е изоморфизъм, а V и V' се наричат *изоморфни* линейни пространства. Означаваме $V \cong V'$.

Твърдение 2. *Ако $\varphi : V \to V'$ е изоморфизъм и $v_1, \dots, v_k \in V$ са линейно независими вектори, то $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k) \in V'$ също са линейно независими вектори.*

Доказателство. Нека

$$\lambda_1\varphi(v_1) + \cdots + \lambda_k\varphi(v_k) = o'$$

за някакви скалари $\lambda_i \in F, i = 1, \dots, k$. От дефиницията и свойствата на линейните изображения имаме, че горното равенство е еквивалентно на

$$\varphi(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) = \varphi(o).$$

Тъй като φ е изоморфизъм и в частност е биективно изображение, имаме

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = o,$$

но т.к. векторите $v_1, \dots, v_k$ са линейно независими, то $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$, а оттук следва, че и векторите $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k)$ също са линейно независими. □

Следващата теорема дава отговор на въпроса кога две линейни пространства са изоморфни. Изоморфността е важна релация, т.к. алгебрата често отъждествява изоморфните обекти и техните свойства, с което изучаването им значително се улеснява.

Теорема. *Две крайномерни линейни пространства V и V' над поле F са изоморфни тогава и само тогава, когато* $\dim V = \dim V'$.

Доказателство. Необходимост: Нека $V \cong V'$ и $\varphi : V \to V'$ е изоморфизъм. Нека още $\dim V = m, \dim V' = n$. Да вземем базис $e_1, \dots, e_m$ от линейно независими вектори на V. Според Твърдение 2 векторите $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_m) \in V'$ също са линейно независими и оттук $\dim V' \geq m$, т.е. $n \geq m$. Нека от друга страна вземем базис $e'_1, \dots, e'_n$ от линейно независими вектори на V'. От свойствата на изоморфизмите и от Теорема 2 следва, че векторите $\varphi^{-1}(e'_1), \dots, \varphi^{-1}(e'_n) \in V$ също са линейно независими. Оттук $\dim V \geq n$, т.е. $m \geq n$. Това означава, че $n = m$, т.е. $\dim V = \dim V'$.
Достатъчност: Нека $\dim V = \dim V' = n$. Нека $e_1, \dots, e_n$ е базис на V, а $e'_1, \dots, e'_n$ е базис на V'. Според Твърдение 1 съществува единствено

линейно изображение $\varphi : V \to V'$ такова че $\varphi(e_i) = e'_i$ за $i = 1, \dots, n$. По-точно, това е изображението

$$\varphi(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 e'_1 + \cdots + \lambda_n e'_n.$$

Нека $v' \in V'$ и $v' = \mu_1 e'_1 + \cdots + \mu_n e'_n$. Разглеждаме вектора $v = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n \in V$. Имаме, че

$$\varphi(v) = \mu_1 e'_1 + \cdots + \mu_n e'_n = v',$$

т.е. за всеки вектор $v' \in V'$ съществува вектор $v \in V$ такъв че $\varphi(v) = v'$. Нека сега вземем $x, y \in V : x \neq y$. Нека $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$, а $y = \beta_1 e_1 + \cdots + beta_n e_n$. От $x \neq y$ следва, че $\alpha_i \neq \beta_i$ за поне един индекс i. Имаме, че

$$\varphi(x) = \alpha_1 e'_1 + \cdots + \alpha_n e'_n$$

и

$$\varphi(y) = \beta_1 e'_1 + \cdots + \beta_n e'_n$$

като $\alpha_i \neq \beta_i$ за поне един индекс i, т.е. $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Така от $x \neq y \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y)$. По този начин φ е биективно линейно изображение, т.е. е изоморфизъм и $V \cong V'$. $\square$

Нека F е поле и $n \in \mathbb{N}$. Тогава F^n е линейно пространство над F с $\dim F = n$. От теоремата следва, че ако V е линейно пространство над F и $\dim V = n$, то $V \cong F^n$.

Следствие. *Съществува единствено, с точност до изоморфизъм, n-мерно линейно пространство над F. Това е пространството F^n.*