Глава 1

Комплексни числа. Числови полета.

1.1 Видове числа.

Нека разгледаме основните числови множества:

Естествените числа са добре известни. Това са числата, които се използват при броене: едно, две, три... Множеството на естествените числа се означава с $\mathbb{N}$, т. е.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}.$$

Забележете, че алгебрата не разглежда 0 като естествено число.

Целите числа включват естествените числа, нулата и целите отрицателни числа. Можеството на целите числа се бележи с $\mathbb{Z}$, т.е.

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Очевидно всяко естествено число е цяло, но не всяко цяло число е естествено. Например числото -1 не принадлежи на естествените числа, т.е. $-1 \notin \mathbb{N}$. В такъв случай можем да кажем, че множеството на естествните числа *се съдържа строго* в множеството на целите числа, т.е. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Рационалните числа са всички числа, които могат да се представят като деление на две цели числа - целочислено делимо и задължително ненулев целочислен делител. По този начин всяко рационално число може да бъде записано като обикновена дроб с числител цяло число и знаменател ненулево цяло число. Множеството на рационалните числа се означава с $\mathbb{Q}$ и формално може да бъде записано по следния начин:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

Например числата $\frac{1}{2}, \frac{22}{7}, -4 = \frac{-4}{1}$ са рационални. От примерите се вижда, че всяко цяло число n може да бъде записано като дроб с числител $n \in \mathbb{Z}$ и знаменател 1. В такъв случай всяко цяло число може да бъде разглеждано като рационално. Обратното очевидно не е вярно т.к. например $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Така получихме, че множеството на целите числа се съдържа строго в множеството на рационалните числа: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Реалните числа включват рационалните числа, както и числата, които не могат да се представят като дроби с целочислени коефициенти (ирационални числа). Интуитивно приемаме, че всяко реално число съответства на точка от числовата права. Обикновено реалните числа се представят като десетични дроби. Рационалните числа могат да бъдат представени като крайни $\left(\frac{1}{2} = 0,5\right)$ или безкрайни периодични $\left(\frac{1}{3} = 0,33333... = 0,(3)\right)$ десетични дроби. Ирационалните числа се записват като безкрайни непериодични десетични дроби ($\pi = 3,14159265358...$). Ясно е, че всяко рационално число може да бъде разглеждано като реално. Обратното не е в сила. Не е трудно да се покаже, че корените на уравнението $x^2 - 2 = 0$ са ирационални числа. Множестовото на реалните числа се бележи с $\mathbb{R}$ и имаме строгото включване $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1.2 Множество на комплексните числа

Да разгледаме уравнението $x^2 + 1 = 0$. То няма реални корени т.к. дискриминантата му $D = -4 < 0$. Съществува числово множество, съдържащо реалните числа, в което уравнението има два различни корена. Това множество се нарича множество на комплексните числа и се бележи с $\mathbb{C}$. Ще построим $\mathbb{C}$ по следния начин:

Разглеждаме множеството от всички наредени двойки реални числа $\mathbb{C} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$. Два елемента от това множество са равни, т.е. $(a, b) = (c, d)$ тогава и само тогава, когато съответните им компоненти са равни (едновременно е в сила $a = c$ и $b = d$). В $\mathbb{C}$ дефинираме операциите събиране ($+$) и умножение (.) по следния начин:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Така за всеки $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ са изпълнени следните свойства:

- *комутативност на събирането*:

$$\alpha+\beta = (a, b)+(c, d) = (a+c, b+d) = (c+a, d+b) = (c, d)+(a, b) = \beta+\alpha,$$

- *асоциативност на събирането*

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),$$

- *комутативност на умножението*

$$\alpha\beta = (a, b)(c, d) = (ac-bd, ad+bc) = (ca-db, cb+da) = (c, d)(a, b) = \beta\alpha,$$

- *асоциативност на умножението*

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma),$$

- *дистрибутивни закони*

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma = \gamma\alpha + \gamma\beta = \gamma(\alpha + \beta).$$

Елементът $(0, 0)$ има следното свойство: за $\forall(a, b) \in \mathbb{C}$ е изпълнено:

$$(a, b) + (0, 0) = (a, b) = (0, 0) + (a, b),$$

т.е. елементът $(0, 0)$ играе ролята на нулев елемент.

Елементът $(1, 0)$ има следното свойство: за $\forall(a, b) \in \mathbb{C}$ е изпълнено:

$$(a, b)(1, 0) = (a.1 - b.0, a.0 + b.1) = (a, b) = (1, 0).(a, b),$$

т.е. елементът $(1, 0)$ играе ролята на единичен елемент относно умножението.

Нека $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ са такива, че $\alpha = (a, b)$, $\beta = (c, d)$, $\gamma = (a - c, b - d)$. Тогва имаме, че

$$\gamma + \beta = (a - c, b - d) + (c, d) = (a, b) = \alpha.$$

В такъв случай елементът γ нариачаме *разлика* на елементите α и β и пишем

$$\gamma = \alpha - \beta.$$

Нека сега $\beta \neq (0,0)$, т.е. $c \neq 0$ и/или $d \neq 0$. Нека $\delta \in \mathbb{C}$ е такъв, че $\delta = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$. Забележете, че такъв елемент наистина съществува, т.к. условието поне едното от c или d да е различно от 0 гарантира, че $c^2 + d^2 \neq 0$. Тогава е изпълнено:

$$\begin{aligned}\beta\delta &= \left(c\frac{ac+bd}{c^2+d^2} - d\frac{bc-ad}{c^2+d^2}, c\frac{bc-ad}{c^2+d^2} + d\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)\\ &= \left(\frac{ac^2+ad^2}{c^2+d^2}, \frac{bc^2+bd^2}{c^2+d^2}\right) = (a,b) = \alpha.\end{aligned}$$

В такъв случай елементът δ наричаме *частно* на елементите α и β и пишем $\delta = \frac{\alpha}{\beta}$.

Нека разгледаме подмножеството $K = \{(a,0) | a \in \mathbb{R}\}$ на $\mathbb{C}$.
За $\forall (a,0), (b,0) \in K$ е изпълнено:

$$(a,0) + (b,0) = (a+b,0) \in K,$$

$$(a,0)(b,0) = (ab,0) \in K.$$

Оттук се вижда, че елементите на K се събират и умножават както съответстващите им реални числа. Можем да отъждествим всеки елемент $(a,0) \in K$ с числото $a \in \mathbb{R}$ и по този начин да считаме, че $K = \mathbb{R}$. Понеже $K \subset \mathbb{C}$, то $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ и по този начин получаваме, че множеството на реалните числа се включва строго в множеството на комплексните числа.

Да разгледаме елементът $i = (0,1) \in \mathbb{C}$:

$$i^2 = i.i = (0,1).(0,1) = (-1,0) \in K$$

или още $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$. Комплексното число i наричаме *имагинерна единица.* Тогава уравнението $x^2 + 1 = 0$ има корени в $\mathbb{C}$ и те са i и $-i$.

Нека a и b са реални числа, а $\alpha \in \mathbb{C}$ е такова, че $\alpha = (a,b)$. Отново отъждествявайки K с $\mathbb{R}$ получаваме

$$b.i = (b,0).(0,1) = (0,b).$$

В такъв случай можем да представим α като

$$\alpha = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi.$$

По този начин всяко комплексно число α може да се запише еднозначно във вида $\alpha = a + bi$, където $a, b \in \mathbb{R}$. Този запис се нарича *алгебричен вид на комплексното число* α. Числото $a \in \mathbb{R}$ се нарича реална част на α и се бележи с $\operatorname{Re}\alpha$, а числото $b \in \mathbb{R}$ се нарича имагинерна част на α и се бележи с $\operatorname{Im}\alpha$. Оттук веднага можем да направим следното наблюдение: ако едно комплексно число α има имагинерна част $\operatorname{Im}\alpha = 0$, то $\alpha = a + 0i = a \in \mathbb{R}$ и всъщност се оказва, че α е реално число. Комплексно число α, за което е изпълнено $\operatorname{Re}\alpha = 0$ има вида $\alpha = bi$. Такива комплексни числа се наричат *чисто имагинерни*, т.е. те нямат реална част.

Да разгледаме няколко примера за събиране и умножаване на комплексни числа:

$$(2 + 4i) + (1 - 6i) = 2 + 4i + 1 - 6i = 3 - 2i,$$

$$(7 - 7i) - (3 + i) = 7 - 7i - 3 - i = 4 - 8i.$$

Оттук се вижда, че комплексните числа се събират (изваждат) като се съберат (извадят) съответно реалните и имагинерните им части и се запише резултата.

$$\begin{aligned}(5 + 2i).(3 - 4i) &= 5.3 - 5.4i + 2.3i - 2.4i^2 = 15 - 20i + 6i - 8.(-1)\\ &= 15 + 8 - 14i = 23 - 14i.\end{aligned}$$

Комплексните числа се умножават като се извърши умножението съгласно дистрибутивните закони.

Нека $\alpha \in \mathbb{C}$ и алгебричният му вид е $\alpha = a + bi$. Числото $\overline{\alpha} \in \mathbb{C}$, такова че $\overline{\alpha} = a - bi$ се нарича *комплексно спрегнато* на комплексното число α.

Свойства на комплексното спрягане:

Ако $\alpha, \beta \in \mathbb{C} : \alpha = a + bi, \beta = c + di$, то:

$$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i = \overline{\alpha + \beta},$$

$$\overline{\alpha}.\overline{\beta} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = \overline{\alpha\beta}.$$

Лесно се вижда, че свойствата

$$\overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta} \qquad \text{и} \qquad \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$$

също са в сила. Още повече, ако вземем произволно $\alpha \in \mathbb{C}$, чийто алгебричен вид е $\alpha = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$, а $\overline{\alpha} \in \mathbb{C}$ е съответното му комплексно спрегнато, то имаме

$$\alpha\overline{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2,$$

откъдето следва, че $\alpha\overline{\alpha} \in \mathbb{R}$, $\alpha\overline{\alpha} \geq 0$ и $\alpha\overline{\alpha} = 0$ точно когато $\alpha = 0$.

След въвеждането на комлексното спрягане може да разгледаме как се извършва делението на комплексни числа, например:

$$\begin{aligned}\frac{5-4i}{2+i} &= \frac{(5-4i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{10-5i-8i+4i^2}{4-i^2} = \frac{10-13i-4}{4+1} \\ &= \frac{6-13i}{5} = \frac{6}{5} - \frac{13}{5}i.\end{aligned}$$

С други думи, ако запишем делението с помощта на обикновена дроб, то първо разширяваме дробта с комплексното спрегнато на знаменателя и след извършване на операциите записваме отговора. Разширяването с комплексното спрегнато всъщност ни помага да се освободим от имагинерната част на делителя, превръщайки знаменателя на дробта в реално число. След това всичко се свежда до добре познатите действия с реални чсила.

Както вече знаем, всяко реално число $a \in \mathbb{R}$ съответства на точка от числовата ос. Ако в равнината е въведена правоъгълна координатна система Oxy, то тогава всяко комплексно число $\alpha = a + bi$ отговаря на точка A от равнината с координати $A(a, b)$. Забележете, че това напълно отговаря на начина, по-който построихме $\mathbb{C}$ като множество от наредени двойки реални числа.

[МЯСТО ЗА ГРАФИКА ЗА АЛГЕБРИЧЕН ВИД НА КОМПЛЕКСНО ЧИСЛО]

В такъв случай комплексно спрегнатото на α е $\overline{\alpha} = a - bi$ и то отговаря на точка $\overline{A}(a, -b)$, която е симетрична на точката A спрямо оста Ox.

Модул или *абсолютна стойност* на комплексното число $\alpha = a + bi$ ще наричаме неотрицателното реално число $|\alpha| = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Забележете, че определено по този начин, числото $|\alpha|$ всъщност е равно на дължината на отсечката между точките $(0,0)$ и (a,b) или казано по друг начин: модулът на комплексното число α е равен на разстоянието от началото на координатната система до точката $A(a,b)$. Ясно е, че $|\alpha| = 0$, точно когато $\alpha = 0$.

В така установеното съответствие следва, че ако точка A лежи на оста Ox, то тя има координати $A(a,0), a \in \mathbb{R}$ и отговаря на комплексното число $\alpha = a + 0i = a \in \mathbb{R}$. Но по този начин се оказва, че α всъщност е реално число. Поради тази причина оста Ox се нарича още *реална ос*. Оттук следва още и фактът, че ако за едно комплексно число е изпълнено $\alpha = \overline{\alpha}$, то α лежи на реалната ос и е реално число. По аналогчен начин, ако една точка лежи върху оста Oy, то тя има координати $A(0,b)$ и отговаря на комплексното число $\alpha = bi$, което е чисто имагинерно. Поради тази причина оста Oy се нарича *имагинерна ос*.

Да отбележим

Основната теорема на алгебрата.
Нека $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, *където* $a_i \in \mathbb{C}\ \forall i = 1,\dots,n$ *и* $a_n \neq 0$. *Тогава уравнението* $f(x) = 0$ *има* n *на брой корена (не непременно различни) в* $\mathbb{C}$. *По-точно съществуват числа* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, *такива че* $f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$.

С други думи всеки полином от n-та степен с числови коефициенти притежава точно n на брой корена, броени с кратностите им, в множеството на комплексните числа. Това свойство на множеството на комплексните числа го определя като *алгебрически затворено*. Например уравнението $x^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 2$ има точно един реален корен и той е $\sqrt[3]{2}$. В множеството на комплексните числа обаче съществуват още два различни комплексни корена на това уравнение. Така в множеството на комплексните числа горното уравнение има точно три корена, което напълно отговаря на степента на полинома $f(x) = x^3 - 2$.

1.3 Числови полета

Нека F е множество от числа (т.е. $F \subset \mathbb{C}$) с поне два елемента[1] (т.е. $|F| \geq 2$). F е поле, ако $\forall a,b \in F \Rightarrow a+b, a-b, ab, \frac{a}{b}(b \neq 0) \in F$. Иначе ка-

[1] Броят на елементите в дадено множество F се нарича *мощност* на множеството и се бележи с $|F|$.

зано, числовото множество F с поне два елемента е поле, ако е затворено спрямо четирите аритметични операции, т.е. резултатът от събирането, изваждането, умножението и делението (на ненулев елемент) на елементи от F също е елемент от F. Например $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ са полета, но $\mathbb{Z}$ не е поле.

Твърдение. *Всяко поле F съдържа в себе си полето $\mathbb{Q}$ (т.е. $\mathbb{Q} \subseteq F \subseteq \mathbb{C}$ за всяко числово поле F).*

Доказателство. $|F| \geq 2 \Rightarrow \exists$ елемент $a \in F, a \neq 0$. Но тогава $a - a = 0 \in F$ и $\frac{a}{a} = 1 \in F$. Оттук $1 + 1 = 2 \in F$ и изобщо за $\forall n \in \mathbb{N}$ имаме $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} \in F$, т.е. $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in F$ и $\mathbb{N} \subset F$. Сега $0, n \in F \Rightarrow 0 - n = -n \in F$ и оттук $\mathbb{Z} \subset F$. Нека $r \in \mathbb{Q}$. Тогава $r = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Но $m, n \in \mathbb{Z} \subset F \Rightarrow m, n \in F$. Следователно $\frac{m}{n} \in F$, т.е. $r \in F$ за произволно $r \in \mathbb{Q}$ и по този начин $\mathbb{Q} \subseteq F$. $\square$