Собствени вектори и собствени стойности на линеен оператор.

Нека V е линейно порстранство над числово поле F с базис $e_1, \dots, e_n$ и $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$. Ако матрицата на φ спрямо този базис е A, то полиномът

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

се нарича характеристичен полином на φ, а корените му $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ се наричат характеристични корени на φ.

Казваме, че векторът $v \in V$ е собствен вектор на оператора φ, ако $v \neq o$ и $\varphi(v) = \lambda v$ за някакво число $\lambda \in F$. (С други думи може да кажем, че собствените вектори на φ са тези, които само сменят големината и/или посоката си под негово влияние, но не се „завъртат“.) Числото λ се нарича собствена стойност на оператора φ, съответстваща на собствения вектор v. Оказва се, че собствените стойности на φ съвпадат точно с тези характеристични корени $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in F$, които принадлежат на числовото поле, над което V е линейно пространство.

Ако v е собствен вектор на φ с матрица A (спрямо фиксиран базис), на който съответства собствената стойност λ, то от равенството $\varphi(v) = \lambda v$, записано в матричен вид

$$Av = \lambda v$$

следва равенството

$$(A - \lambda E)v = o,$$

откъдето става ясно, че собственият вектор v, съответстващ на собствената стойност λ е някакво решение на хомогенната система с матрица $A - \lambda E$.

Задача 1. *Намерете характеристичните корени на матрицата*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Решение. Имаме, че характеристичният полином на A е

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha = 1 - 2\lambda\cos\alpha + \lambda^2.$$

Тогава характеристичните корени на A са корните на уравнението

$$\lambda^2 - (2\cos\alpha)\lambda + 1 = 0,$$

а именно $\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$. $\square$

Задача 2. *Линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ има матрица*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

спрямо фиксиран базис. Намерете собствените му стойности и съответсващите им собствени вектори.

Решение. За да намерим собствените стойности решаваме характеристичното уравнение

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -1-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 3-\lambda \\ 2 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)[(2-\lambda)(-5-\lambda) - 8] = (3-\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda - 18) =$$

$$= (3-\lambda)^2(\lambda + 6) = 0,$$

чиито корени очевидно са $\lambda_{1,2} = 3, \lambda_3 = -6$. И трите характерисични корена са реални и следователно собствените стойности на φ са $\lambda_{1,2} = 3$ и $\lambda_3 = -6$.

Собствената стойност $\lambda = 3$ е двукратен характеристичен корен и следователно търсим два линейно независими собствени вектора, които й отговарят. За да намерим собствени вектори, отговарящ на собствената стойност $\lambda = 3$, търсим линейно независими ненулеви решения на хомогенната система с матрица

$$A - \lambda E = A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Правим гаусовите преобразувания

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2 \quad 2 \\ + \\ + \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

И ако изберем x_2 и x_3 са свободни параметри, то намираме, че $x_1 = -2x_2 + 2x_3$. Тогава решенията имат вида

$$(-2x_2 + 2x_3, x_2, x_3)$$

и едно фиксирано решение при $x_2 = 1, x_3 = 0$ е $v_1 = (-2, 1, 0)$, а друго, при $x_2 = 0, x_3 = 1$ е $v_2 = (2, 0, 1)$. Тогава собствените вектори v_1, v_2 съответсвтат на собствената стойност $\lambda = 3$.

За да намерим собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda = -6$, търсим ненулево решение на хомогенната система с матрица $A - \lambda E = A + 6E$. Продължете по същия начин, както по-горе. Един възможен собствен вектор е $w = (1, 2, -2)$. $\square$

Понякога ни интересува, спрямо кой базис на линейното пространство V, матрицата на линейния оператор $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$ има най-прост вид. Ако намерим базис от линейно независими собствени вектори на φ, то от равенствата $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$ ще следва, че матрицата на φ спрямо този базис е диагонална и по диагонала стоят точно съответстващите на собствените вектори собствени стойности.

Задача 3. *Нека e_1, e_2, e_3 е базис на линейното пространство V и $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$. Намерете базис на V, в който операторът φ има диагонална матрица D, ако φ действа по правилото*

$$\varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (2x_1 - 2x_2 - 4x_3)e_1 + (-2x_1 + 5x_2 - 2x_3)e_2 + (-4x_1 - 2x_2 + 2x_3)e_3.$$

Решение. Първо, трябва да намерим матрицата на φ в дадения базис $\{e\}$. За целта трябва да видим как действа φ върху всеки от базисните вектори. За да видим как действа φ на e_1, задаваме $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0$ и тогава според правилото, по което действа φ получаваме

$$\varphi(e_1) = 2e_1 - 2e_2 - 4e_3.$$

За да видим как действа φ на e_2, задаваме $x_2 = 1, x_1 = x_3 = 0$ и тогава

$$\varphi(e_2) = -2e_1 + 5e_2 - 2e_3.$$

За да видим как действа φ на e_2, задаваме $x_3 = 1, x_1 = x_2 = 0$ и тогава получаваме

$$\varphi(e_3) = -4e_1 - 2e_2 + 2e_3.$$

Следователно матрицата на φ спрямо базиса $\{e\}$ е

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

По познатия начин намерете, че собствените стойности на φ са $\lambda_{1,2} = 6, \lambda_3 = -3$, и един набор от линейно независими съответстващи им собствени вектори е

$$v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (1, -4, 1), v_3 = (2, 1, 2).$$

Тогава v_1, v_2, v_3 образуват базис $\{v\}$ на V и спрямо него матрицата на φ е

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$\square$