Линейни оператори.

Нека V_1, V_2 са линейни пространства над полето F. Казваме, че изображението

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

е линейно изображение от V_1 в V_2, ако

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \forall x, y \in V$$

и

$$\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) \quad \forall x \in V, \forall \lambda \in F.$$

Нека $\dim V_1 = n$ и $e_1, \ldots, e_n$ е някакъв негов базис. Ако φ действа на базисните вектори чрез

$$\varphi(e_1) = \alpha_{11}e_1 + \cdots + \alpha_{n1}e_n,$$

$$\varphi(e_2) = \alpha_{12}e_1 + \cdots + \alpha_{n2}e_n,$$

$$\ldots$$

$$\varphi(e_n) = \alpha_{1n}e_1 + \cdots + \alpha_{nn}e_n,$$

то матрицата

$$A_e = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

се нарича матрица на линейния оператор φ спрямо базиса $\{e\}$.

Подмножеството

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{v \in V_1 | \varphi(v) = o\} \subseteq V_1$$

е подпорстранство на V_1, наречено ядро на φ.
Подмножеството

$$\operatorname{Im}\varphi = \{v \in V_2 | \exists w \in V_1 : \varphi(w) = v\} \subseteq V_2$$

е подпространсто на V_2, наречено образ на линейния оператор φ.

В случаите, когато $V_1 = V_2 = V$, казваме, че φ е линеен оператор над пространството V и пишем $\varphi \in \operatorname{Hom}(V)$. Нека $\dim V = n$ и $e_1, \ldots, e_n$ е някакъв негов базис. Ако φ действа на базисните вектори чрез

$$\varphi(e_1) = \alpha_{11}e_1 + \cdots + \alpha_{n1}e_n,$$

$$\varphi(e_2) = \alpha_{12}e_1 + \cdots + \alpha_{n2}e_n,$$

$$\ldots$$

$$\varphi(e_n) = \alpha_{1n}e_1 + \cdots + \alpha_{nn}e_n,$$

то матрицата

$$A_e = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

се нарича матрица на линейния оператор φ спрямо базиса $\{e\}$.

Размерността $\dim \operatorname{Ker}\varphi$ се нарича дефект на линейния оператор φ, а размерността $\dim \operatorname{Im}\varphi$ се нарича ранг на линейния оператор. В сила е равенството $\dim V = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi$.

Нека $\{e\}$ и $\{f\}$ са два базиса на линейното пространство V и имаме, че

$$\left| \begin{array}{lllll} f_1 = & \tau_{11}e_1 & +\tau_{21}e_2 & +\ldots & +\tau_{n1}e_n, \\ f_2 = & \tau_{12}e_1 & +\tau_{22}e_2 & +\ldots & +\tau_{n2}e_n, \\ \ \ldots & & & & \\ f_n = & \tau_{1n}e_1 & +\tau_{2n}e_2 & +\ldots & +\tau_{nn}e_n, \end{array} \right.$$

то матрицата

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

се нарича матрица на прехода от базиса $\{e\}$ към базиса $\{f\}$ и записваме

$$e \xrightarrow{T} f.$$

Ако за произволен вектор $x \in V$ имаме, че

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$$

и

$$x = \zeta_1 f_1 + \cdots + \zeta_n e_n,$$

то тогава $\xi = T\zeta$ и $\zeta = T^{-1}\xi$.
Ако A е матрицата на φ спрямо базиса $\{e\}$, а B е матрицата на φ спрямо базиса $\{f\}$, то

$$B = T^{-1}AT.$$

Задача 1. *Нека e_1, e_2 е базис на линейното пространство V и $\varphi \in$ $\mathrm{Hom}(V)$ има матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ в базиса*

$$a_1 = -3e_1 + 7e_2, a_2 = e_1 - 2e_2,$$

а $\psi \in \mathrm{Hom}(V)$ има матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ в базиса

$$b_1 = 6e_1 - 7e_2, b_2 = -5e_1 + 6e_2.$$

Намерете матрицата на оператора $\varphi\psi$ в базиса e_1, e_2.

Решение. За целта трябва да намерим матриците на φ и ψ в базиса e_1, e_2 и са ги умножим.

От $a_1 = -3e_1 + 7e_2, a_2 = e_1 - 2e_2$, че матрицата на прехода от $\{e\}$ към $\{a\}$ е

$$T = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Това означава, че $A + T^{-1}\overline{A}T$. Тогава матрицата на φ в басиза $\{e\}$ е

$$\overline{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично намираме, че матрицата на ψ в базиса $\{e\}$ е

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} -143 & -122 \\ 177 & 151 \end{pmatrix}.$$

Тогава матрицата на $\varphi\psi$ е

$$C = \overline{A}.\overline{B} = \begin{pmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Задача 2. *Нека e_1, e_2, e_3 е базис на линейното пространство V и $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$ изобразява векторите a_1, a_2, a_3 съответно във векторите b_1, b_2, b_3. Намерете матрицата на φ в базиса $\{e\}$, ако*

$$a_1 = e_1 + 2e_2 + e_3, a_2 = 2e_1 + e_3, a_3 = e_1 + e_3,$$

$$b_1 = 4e_1 + 2e_2 + 5e_3, b_2 = e_1 + e_2, b_3 = e_3.$$

Решение. Преди всичко проверете, че векторите a_1, a_2, a_3, а също и b_1, b_2, b_3 са линейно независими, което ще осигури коректността на задачата, тъй като те образуват базиси на линейното пространство.

Според дадената информация имаме, че матрицата на прехода $e \xrightarrow{T} a$ е

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В такъв случай, ако ξ_i са координатите на b_i в базиса $\{e\}$, а ζ_i в базиса $\{a\}$, то

$$\xi_i = T\zeta_i$$

или еквивалентно

$$\zeta_i = T^{-1}\xi_i.$$

Тогава намираме, че координатите на b_i в базиса $\{a\}$ са съответно

$$b_1 = a_1 - a_2 + 5a_3,$$

$$b_2 = \frac{1}{2}a_1 + a_2 - \frac{3}{2}a_3,$$

$$b_3 = -a_2 + 2a_3.$$

Имайки предвид, че $\varphi(a_i) = b_i$, то матрицата на φ в базиса $\{a\}$ е

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогава матрицата на φ в базиса $\{e\}$ е

$$A = TBT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Задача 3. *Нека e_1, e_2, e_3, e_4 е базис на четиримерното пространство V, спрямо който линейният оператор $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$ има матрица*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -9 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Намерете базиси на подпространствата $\operatorname{Ker}\varphi, \operatorname{Im}\varphi, \operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi, \operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Im}\varphi$.

Решение. Векторът $v \in V$ принадлежи на ядрото $\operatorname{Im}\varphi$, точно когато $\varphi(v) = o$. На матричен език това означава, че

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -9 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

където (x_1, x_2, x_3, x_4) са координатите на вектора v или с други думи, координатите на v удовлетворяват хомогенната система с матрица A, което пък означава, че v попада в пространството от нейните решения. Следователно базис на $\operatorname{Ker}\varphi$ ще бъде всяка ФСР на хомогенната система с матрица A. Пресметнете сами по познатия начин. Един възможен базис са векторите $(-2, 1, 0, 0)$ и $(1, 0, -1, 1)$. Оттук се вижда, че дефектът на φ е 2.

Векторът $w \in V$ принадлежи на образът $\operatorname{Im}\varphi$, точно когато съществува вектор $u \in V$, такъв че $\varphi(u) = w$. Ако $u = \sum_{i=1}^4 \alpha_i e_i$, т.е. $u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ в базиса $\{e\}$, то

$$w = \varphi(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \varphi(e_i),$$

което означава, че всеки вектор от образа принадлежи на линейната обвивка $\ell(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$. Следователно, за да намерим базис на $\operatorname{Im}\varphi$, е достатъчно да намерим МЛНЗП на образите $\varphi(e_i)$ на базисните вектори, които съвпадат с вектор-стълбовете на матрицата A на линейния оператор φ спрямо същия този базис $\{e\}$. Намерете такава подсистема по познатия начин. Една възможна такава е $(1, 0, -1, 1), (0, 1, -1, 1)$. Оттук се вижда, че рангът на φ е 2.

След като вече имаме $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$ като линейни обвивки на известни вектори е лесно са намерим базис на $\operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Im}\varphi$ като МЛНЗП на съвкупността на векторите от двете обвивки. Един възможен базис са векторите $(1, 0, -1, 1), (0, 1, -2, 2), (0, 0, -1, 1)$.

Имаме, че $\operatorname{Ker}\varphi$ съвпада с пространството от решения на хомогенната система с матрица A. Намерете хомогенната система, чието пространство от решения съвпада с $\operatorname{Im}\varphi$ (т.е. на линейната обвивка на базисните му вектори). За да намерите базис на $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$, както вече е известно, просто трябва да намерите ФСР на системата, съставена от обединението на двете хомогенни системи. Един възможен базис е $(1, 0, -1, 1)$. $\square$