Фундаментална система решения на хомогенна система линейни уравнения. Сума и сечение на подпространства.

Нека разгледаме хомогенната система

$$\left|\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & =0, \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & =0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & =0. \end{array}\right.$$

За нея знаем, че тя винаги е съвместима, т.к. нулевото решение $(0, 0, \dots, 0)$ винаги я удовлетворява. Ако след гаусови преобразувания получим получим триъгълна система, то тя е определена и няма друго решение. В останалите случаи системата е неопределена и зависи от няколко на брой параметъра. Тогава директно се проверява, че множеството от решенията на системата е линейно пространство U над полето F, съдържащо коефициентите. Нещо повече, $U \leq V = F^n$ и $\dim U = n - \operatorname{rank}(A)$, където A е матрицата на системата. В такъв случай да намерим фундаментална система решения (ФСР) на хомогенната система линейни уравнения означава да намерим някакъв базис на пространството от решения U. Ако базисът се състои от векторите $a_1, \dots, a_k$, то е ясно, че $U = \ell(a_1, \dots, a_k)$.

Задача 1. *Намерете фундаментална система от решения на хомогенната линейна система*

$$\left|\begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & =0, \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & =0, \\ 2x_1 & -3x_2 & -2x_3 & +3x_4 & =0. \end{array}\right.$$

Решение. Започваме с преобразуванията на матрицата на системата:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 2 & -3 & -2 & 3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 0 & 2\\ 0 & -5 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Рангът на матрицата е 2 и следователно пространството от решенията U е с $\dim U = 4 - 2 = 2$. Нека изберем x_3 и x_4 за свободни параметри. Тогава намираме

$$x_2 = x_4 \text{ и } x_1 = x_3.$$

Следователно решенията имат вида

$$(x_3, x_4, x_3, x_4).$$

При $x_3 = 1, x_4 = 0$ получаваме вектора $b_1 = (1, 0, 1, 0)$, а при $x_3 = 0, x_4 = 1$ получаваме вектора $b_2 = (0, 1, 0, 1)$. Векторите a_1, a_2 образуват една фундаментална система решения на системата и $U = \ell(b_1, b_2)$. □

Задача 2. *Намерете хомогенна система, пространството от решенията на която съвпада с $W = \ell(a_1, a_2, a_3)$, където*

$$a_1 = (1, 2, 3, 4), a_2 = (3, 2, 7, 6), a_3 = (1, -2, 1, -2).$$

Решение. Съставяме матрицата

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 7 & 6\\ 1 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix},$$

чиито вектор-редове са векторите a_1, a_2, a_3 и решаваме хомогенната система, която й съответства. По метода на Гаус имаме

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 7 & 6\\ 1 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -4 & -2 & -6\\ 0 & -4 & -2 & -6\end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -4 & -2 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \ \Big| \cdot -\tfrac{1}{2} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Сега, ако изберем x_2 и x_4 за свободни параметри, намираме, че

$$x_3 = -2x_2 - 3x_4 \text{ и } x_1 = 4x_2 + 5x_4$$

или с други думи решенията на системата имат вида

$$(4x_2 + 5x_4, x_2, -2x_2 - 3x_4, x_4).$$

При $x_2 = 1, x_4 = 0$ получаваме вектора $c_1 = (4, 1, -2, 0)$, а при $x_2 = 0, x_4 = 1$ получаваме вектора $c_2 = (5, 0, -3, 1)$. Тогава търсената в задачата хомогенна система е с коефициенти координатите на тези вектори, т.е.

$$\left|\begin{array}{lllll} 4x_1 & +x_2 & -2x_3 & & = 0, \\ 5x_1 & & -3x_3 & +x_4 & = 0. \end{array}\right.$$

$\square$

Задача 3. *Нека в линейното пространство* $\mathbb{R}^4$ *са дадени линейната обвивка* $W = \ell(a_1, a_2, a_3, a_4)$ *на векторите*

$$a_1 = (1, 2, 3, 4), a_2 = (3, 2, 7, 6), a_3 = (1, -2, 1, -2)$$

и пространството от решения U *на линейната хомогенна система*

$$\left|\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & = 0, \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0, \\ 2x_1 & -3x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = 0. \end{array}\right.$$

Намерете базиси на пространствата $U + W$ *и* $U \cap W$.

Решение. За да намерим базис на $U + W$ трябва предварително да представим U и W като линейни обвивки на някакви вектори. Тогава $U + W$ ще има за базис някаква МЛНЗП на тези вектори. От Задача 1 знаем, че $U = \ell(b_1, b_2)$, където

$$b_1 = (1, 0, 1, 0), b_2 = (2, -1, 0, 1),$$

а по условие $W = \ell(a_1, a_2, a_3)$. Следователно трябва да намерим някоя МЛНЗП на векторите $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\}$. Подреждаме ги като вектор-редове в матрица и започваме преобразувания по метода на Гаус.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 7 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -2 & -6 \\ 0 & -4 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot -\frac{1}{2} \\ \\ \mid \cdot -\frac{1}{2} \\ \\ \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ + \\ \\ + \\ -2 \quad -1 \end{array} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -1 \\ \\ + \\ \\ \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оттук вече е ясно, че една МЛНЗП е $\{a_1, a_2, b_2\}$ и тогава $U + W = \ell(a_1, a_2, b_2)$, т.е. a_1, a_2, b_2 е един възможен базис.

Когато търсим базис на сечението $U \cap W$ представяме U и W като пространства от решения на хомогенна система линейни уравнения. Тогава базис на $U \cap W$ ще бъде ФСР на системата съставена от обединяването на тези две системи. От Задача 2 знаем, че W е пространството от решенията на системата

$$\left| \begin{array}{lllll} 4x_1 & +x_2 & -2x_3 & & = 0, \\ 5x_1 & & -3x_3 & +x_4 & = 0, \end{array} \right.$$

а по условие U е пространството от решения на системата

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & = 0, \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0, \\ 2x_1 & -3x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = 0. \end{array} \right.$$

Следователно трябва да намерим ФСР на системата

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & = 0, \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0, \\ 2x_1 & -3x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = 0, \\ 4x_1 & +x_2 & -2x_3 & & = 0, \\ 5x_1 & & -3x_3 & +x_4 & = 0. \end{array} \right.$$

Преобразуваме матрицата на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -1 \quad -2 \quad -4 \quad -5 \\ + \\ + \\ + \\ + \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -\frac{5}{2} \quad \mid \cdot -\frac{1}{2} \\ + \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Сега, ако изберем x_4 за свободно неизвестно, получаваме че $x_3 = -\dfrac{1}{2}x_4, x_2 = x_4$ и $x_1 = \dfrac{1}{2}x_4$, т.е. получаваме решенията

$$\left(\frac{1}{2}x_4, x_4, -\frac{1}{2}x_4, x_4\right).$$

Сега при $x_4 = 1$ получаваме базисният вектор $c = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 1\right)$ и $U \cap W = \ell(c)$. $\square$