Ранг на система вектори. Ранг на матрица.

Нека V е линейно пространство над поле F и $a_1, \dots, a_n \in V$. Казваме, че системата вектори $\{a_1, \dots, a_n\}$ има ранг k и пишем $\operatorname{rank}(a_1, \dots, a_n) = k$, ако k е максималният брой линейно независими вектори в тази система. Ако изберем една такава максимално линйно независима подсистема вектори, то тя се превръща в базис на линейната обвивка $\ell(a_1, \dots, a_n) \leq V$.

Ако имаме матрицата $A = (a_{ij})_{m\times n}$, в която сме означили вектор-редовете с $a_1, \dots, a_m$, а вектор-стълбовете с $b_1, \dots, b_n$, то рангът на матрицата A се определя като

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(a_1, \dots, a_m) = \operatorname{rank}(b_1, \dots, b_n).$$

Задача 1. *Намерете ранга на системата вектори*

$$a_1 = (3, 5, -13, 11), a_2 = (3, -1, 3, -3), a_3 = (3, 2, -5, 4), a_4 = (3, 8, -21, 18),$$

както и някоя МЛНЗП.

Решение. Съставяме матрица, чиито вектор-редове са посочените вектори и започваме да я преобразуваме по метода на Гаус.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -13 & 11 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & 8 & -21 & 18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 5 & -13 & 11 \\ 0 & -6 & 16 & -14 \\ 0 & -3 & 8 & -7 \\ 0 & 3 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 5 & -13 & 11 \\ 0 & -6 & 16 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оттук се вижда, че векторите a_3 и a_4 са линейно зависими от векторите a_1 и a_2и следователно една МЛНЗП е $\{a_1, a_2\}$. $\square$

Задача 2. *Намерете ранга на матрицата*

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 3 & -7 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Решение. Постъпваме по обичайния начин – преобразувания по метода на Гаус.

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 3 & -7 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & 10 & -8 & -6 \\ 0 & -15 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Оттук се вижда, че третият и четвъртият ред са в линейна зависимост от останалите два и следователно $\operatorname{rank}(A) = 2$. $\square$

Задача 3. *Намерета ранга на матрицата*

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

в зависимост от параметъра λ.

Решение. След няколко елементарни преобразувания получаваме

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 3+\lambda \end{pmatrix} \to$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} .$$

Тогава при $\lambda = 0$ имаме, че $\operatorname{rank}(A) = 2$, а при $\lambda \neq 0$ имаме, че $\operatorname{rank}(A) = 3$. □

Задача 4. *В пространството*

$$\mathbb{Q}^3[x] = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid \deg f \leq 2\}$$

са дедени полиномите

$$f_1(x) = 2x^2 - 3x + 1, f_2(x) = x^2 - 8x + 2, f_3(x) = 2x^2 + 2x + 1, f_4(x) = x^2 - 1.$$

Определете ранга на системата вектори $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ и намерете някоя МЛНЗП.

Упътване. Тъй като $\mathbb{Q}^3[x] \cong \mathbb{Q}^3$, то на произволен полином $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2 \in \mathbb{Q}^3[x]$ можем да съпоставим вектора $f = (a_0, a_1, a_2)$. Тогава задачата се свежда до намиране на ранга на системата от вектори

$$f_1 = (2, -3, 1), f_2 = (1, -8, 2), f_3 = (2, 2, 1), f_4 = (1, 0, -1).$$

□