Матрици.

Грубо казано, матрица е правоъгълна таблица от числа, лежащи в дадено числово поле. С $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ще означаваме матрица, която има m реда и n стълба. Дефинираме събиране и изваждане на матрици с еднакъв брой редове и еднакъв брой стълбове $A = (a_{ij})_{m\times n}$ и $B = (b_{ij})_{m\times n}$ като

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m\times n}.$$

Ако λ е произволно число, то дефинираме умножение на матрица с число като

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m\times n}.$$

Умножението на две матрици е дефинирано само в специалния случай, когато броят на стълбовете на матрицата отляво съвпада с броя на редовете на матрицата отдясно, т.е. когато $A = (a_{ij})_{m\times \underline{n}}$ и $B = (b_{ij})_{\underline{n}\times k}$. В този случай имаме

$$AB = C = (c_{ij})_{m\times k},$$

където $c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}$, т.е. умножението се извършва по правилото „ред по стълб“. В общия случай $AB \neq BA$. Матрицата $[A, B] = AB - BA$ се нарича комутатор на матриците A и B. Ясно е, че $[A, B] = \mathbb{O} \iff AB = BA$.

Ако A е матрица, то матрицата, която, неформално казано, се получава от A при „завъртане“ на матрицата A спрямо главния ѝ диагонал, се нарича транспонирана на A и се записва като A^t. Ясно е, че още едно такова „завъртане“ връща матрицата в изходно положение, т.е. $(A^t)^t = A$. В сила е свойството $(AB)^t = B^tA^t$.

Матрицата $\mathbb{O}$, състояща се изцяло от нули се нарича нулева матрица и за нея е в сила, че

$$A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$$

за произволна матрица A със същия брой редове и стълбове.

Квадратната матрица $E = (\delta_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$ се нарича единична матрица от ред n и тя има свойството

$$AE = EA = A$$

за произволна квадратна матрица A от ред n.

Матрицата E_{ij}, чиито всички елементи са нулеви с изключение на елемента в i-тия ред и j-тия стълб, който е 1, се нарича матрична единица. Произволна матрица може да се раложи като сбор на матрични единици, умножение с някакво число. Например

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} =$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}.$$

Ако

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

е полином, то при $x = A$ получаваме матрицата

$$f(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_nE.$$

Задача 1. *Извършете действията*

а) $A.B$, където

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

б) A^n, където

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

в)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. а) Използваме правилото „ред по стълб“. Елементът в първи ред и първи стълб на произведението получаваме като умножим почленно първия ред на A с първия стълб на B. С други думи, ако $AB = C = (c_{ij})_{2\times 3}$, то

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1.1 + 2.2 + 2.1 = 1 + 4 + 2 = 7.$$

Елементът в първи ред и втори стълб на произведението получаваме като умножим почленно първия ред на A с втория стълб на B. Така имаме, че

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 1.0 + 2.(-1) + 2.2 = 0 - 2 + 4 = 2.$$

И така нататък, продължавайки по същата процедура намираме, че

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 7 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

б) По познатия начин пресмятаме, че

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Този резултат ни подсказва да проверим индукционно дали

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}.$$

Вече проверихме основата на индукцията. Предполагаме, че това равенство е изпълнено за всички числа до $n-1$ включително. Ще докажем, че е вярно и за n. Наистина, имаме че

$$A^n = A^{n-1}A = \begin{pmatrix} \cos(n-1)\alpha & -\sin(n-1)\alpha \\ \sin(n-1)\alpha & \cos(n-1)\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\cos(n-2)\alpha + \cos n\alpha}{2} - \frac{\cos(n-2)\alpha - \cos n\alpha}{2} & -\frac{\sin n\alpha - \sin(n-2)\alpha}{2} - \frac{\sin n\alpha + \sin(n-2)\alpha}{2} \\ \frac{\sin n\alpha - \sin(n-2)\alpha}{2} + \frac{\sin n\alpha + \sin(n-2)\alpha}{2} & -\frac{\cos(n-2)\alpha - \cos n\alpha}{2} + \frac{\cos(n-2)\alpha + \cos n\alpha}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}.$$

Индукционната стъпка доказва равенството.

в) Отново по правилото „ред по стълб“ имаме, че

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1.1 + 2.2 + 3.3 = 1 + 4 + 9 = 14$$

и

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Казваме, че квадратната матрица $A = (a_{ij})_{n\times n}$ от ред n е неособена, ако нейната детерминанта $\det A$ е различна от 0. Казаното дотук е еквивалентно на това матрицата A да е обратима, т.е. да съществува квадратна матрица A^{-1} от ред n, така че да е изпълнено $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Практическото намиране на обратната матрица става като образуваме разширената матрица $(A|E)$ и с гаусови преобразувания превърнем лявата ѝ част A в единичната матрица E, тогава дясната ѝ част E ще се е превърнала в обратната матрица A^{-1}. По-формално записано целта ни е, ръководейки се от лявата част на матрицата да направим елементарни преобразувания, така че

$$(A|E) \to \cdots \to (E|A^{-1}).$$

До същия резултат се стига и ако образуваме разширената матрица $(E|A)$ и, ръководейки се от дясната ѝ част, достигнем до матрицата $(A^{-1}|E)$ с помощта на гаусови преобразувания.

$$(E|A) \to \cdots \to (A^{-1}|E).$$

Задача 2. *Намерете обратната на матрицата*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Образуваме разширената матрица

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

и започваме да извършваме преобразуванията, познати от метода на Гаус.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \cdot -1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} .$$

С това преобразувахме лявата страна наматрицата до E, което означава, че дясната страна ни дава

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -1 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} .$$

□

<u>Матрични уравнения:</u>

Матрични уравнения са уравнения от вида $AX = B, XA = B$ или $AXB = C$, където матриците A, B и C са известни, а се търси неизвестната матрица X.

Когато решаваме уравнението $AX = B$, съставяме разширената матрица $(A|B)$, която, водейки се от лявата част, преобразуваме по редове във вида $(E|X)$. В такъв случай $X = A^{-1}B$.

Когато решаваме уравнението $XA = B$, съставяме разширената матрица $\left(\dfrac{A}{B}\right)$, която, водейки се от горната част преобразуваме по стълбове във вида $\left(\dfrac{E}{X}\right)$. В такъв случай $X = BA^{-1}$.

Когато решаваме уравнението $AXB = C$ можем да подходим по два начина:
1) полагаме $XB = Y$ и решаваме за Y уравнението $AY = C$, а след това решаваме за X уравнението $XB = Y$;
2) полагаме $AX = Y$ и решаваме за Y уравнението $YB = C$, а след това решаваме за X уравнението $AX = Y$. И в двата случая $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Задача 3. *Решете матричното уравнение*

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

Решение. Полагаме

$$Y = X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и решаваме матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

Съставяме разширената матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & -5 & 2 & 18 & 12 & 9 \\ 5 & -7 & 3 & 23 & 15 & 11 \end{array} \right)$$

и започваме да я преобразуваме по редове докато превърнем лявата част в единичната матрица.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & -5 & 2 & 18 & 12 & 9 \\ 5 & -7 & 3 & 23 & 15 & 11 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2 \quad -\frac{5}{2} \\ + \\ + \end{array} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 12 & 13 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 18 & 15 & 16 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ 3 \quad -\frac{1}{2} \\ + \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 44 & 36 & 37 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 11 & 9 & \frac{19}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot \frac{1}{2} \\ \\ \mid \cdot 2 \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 22 & 18 & \frac{37}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 22 & 18 & 19 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \\ -\frac{1}{2} \end{array} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 22 & 18 & 19 \end{pmatrix} \quad .$$

Следователно

$$Y = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 9 \\ 14 & 12 & 13 \\ 22 & 18 & 19 \end{pmatrix}.$$

Така остава да решим уравнението

$$X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 9 \\ 14 & 12 & 13 \\ 22 & 18 & 19 \end{pmatrix}.$$

Съставяме разширената матрица

$$\left(\begin{array}{ccc} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 11 & 9 & 9 \\ 14 & 12 & 13 \\ 22 & 18 & 19 \end{array}\right)$$

и започваме да я преобразуваме по стълбове докато превърнем горната част в единичната матрица.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & & -1 \\ & + & -1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 11 & 9 & 9 \\ 14 & 12 & 13 \\ 22 & 18 & 19 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & -1 & \\ & 2 & + \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & 13 \\ 3 & -1 & 19 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \cdot \frac{1}{2} & \cdot -1 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 9 \\ 2 & -1 & 11 \\ 4 & -1 & 17 \end{pmatrix} \end{array} \to$$

$$
\to \begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} -8 & + & + \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 8 \\
0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 9 \\
1 & 1 & 11 \\
2 & 1 & 17
\end{pmatrix}
\end{array}
\to \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 3 \\
2 & 3 & 1
\end{pmatrix} .
$$

С това окончателно намерихме, че

$$
X = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 3 \\
2 & 3 & 1
\end{pmatrix} .
$$

$\square$