Детерминанти.

Ако $A = (a_{ij})_{n\times n}$ е квадратна матрица, то нейната детерминанта е сумата

$$\sum(-1)^{[i_1 i_2 \dots i_n]} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

взета по всички пермутации на числата от 1 до n.

За практическото пресмятане на детерминанти е необходимо да сме запознати предварително с основните свойства на детерминантите. Най-често пресмятането ще става с развиването на детерминантата по някой неин ред или стълб.

Най-елементарния нетривиален пример за детерминанта е за тази на 2×2 матрица. Имаме, че

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Детерминанти от трети ред се пресмятат по правилото на Сарус като

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Горнотриъгълните (и съответно долнотриъгълните) детерминанти от вида

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \dots & * \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn},$$

а тези от вида

$$\begin{vmatrix} * & \dots & * & a_{1n} \\ * & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{n1} \dots a_{2,n-1} a_{1n}.$$

Задача 1. *Пресметнете детерминантите*

а)

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix},$$

б)

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Директно пресмятаме детерминантата по правилото на Сарус. Имаме

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1.1.0+(-2).2.(-1)+3.0.3-3.1.(-1)-(-2).0.3-1.2.3 =$$

$$= 0 + 4 + 0 + 3 - 0 - 6 = 1.$$

б) Ще развием детерминантата по първи ред. От свойствата на детерминантите имаме, че

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a_1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+a_2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + a_3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+a_4(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a_5(-1)^{1+5} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Всички детерминанти в развитието, освен тази след a_3 са горно или долнотриъгълни и се пресмятат директно. За третата детерминанта имаме следното развитие по първи стълб

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1).(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1).1.(-1) = 1.$$

Сега вече можем да кажем, че

$$\Delta_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

□

Задача 2. *Пресметнете*

а) детерминантата от ред n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix},$$

б) детерминантата от ред $n+1$

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & x_1 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & x_2 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n-1} & \dots & 1 & 1 & 1 \\ x_n & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

в) детерминантата от ред $n+1$

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - b_n & a_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}.$$

Решение. а) Развиваме детерминантата по първи стълб. Изпускайки членовете в развитието, съответстващи на нулевите елементи, имаме

$$\Delta_n = x(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & x & y \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} + y(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & x & y \end{vmatrix} =$$

$$= x^n + (-1)^{n+1}y^n = x^n - (-y)^n.$$

б) Превръщаме детерминантата в триъгълна, изваждайки първия ред от всички останали редове и пресмятаме:

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & x_1 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & x_2 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n-1} & \dots & 1 & 1 & 1 \\ x_n & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_1 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & x_2 - 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & x_{n-1} - 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ x_n - 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}} \prod_{i=1}^{n} (x_i - 1).$$

в) Превръщаме детерминантата в триъгълна, изваждайки последния стълб от всички останали стълбове и пресмятаме:

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - b_n & a_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -b_1 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & -b_2 & 0 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_n & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}}(-1)^n \prod_{i=1}^{n} b_i.$$

□

Задача 3. *Пресметнете детерминантата от тип пачи крак*

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ c_n & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Решение. Целта ни е да анулираме елементите от първия стълб, намиращи се под a_0, за да приведем детерминантата в триъгълен вид. (Очевидно алтернативен подход е да анулираме елементите в първия ред, вдясно от a_0.) Последователно прибавяме към първи стълб: втори стълб, умножен с $-\dfrac{c_1}{a_1}$; трети стълб, умножен с $-\dfrac{c_2}{a_2}$, и т.н. $n+1$-ви стълб, умножен с $-\dfrac{c_n}{a_n}$. Имаме

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ c_n & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix},$$

където

$$A = a_0 - \frac{c_1}{a_1}b_1 - \frac{c_2}{a_2}b_2 - \dots - \frac{c_n}{a_n}b_n = a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{a_i} b_i.$$

Сега детерминантата вече е в триъгълен вид и можем да запишем

$$\Delta_{n+1} = A \prod_{k=1}^{n} a_k = \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{a_i} b_i \right) \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

$\square$

Задача 4. *Пресметнете детерминантата на Вандермонд*

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} .$$

Решение. Анулираме елементите в първи стълб под 1.

$$W(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \dots & x_n(x_n - x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x_2^{n-3}(x_2 - x_1) & x_3^{n-3}(x_3 - x_1) & \dots & x_n^{n-3}(x_n - x_1) \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} .$$

Сега, развивайки детерминантата по първи стълб, получаваме

$$W(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \dots & x_n(x_n - x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-3}(x_2 - x_1) & x_3^{n-3}(x_3 - x_1) & \dots & x_n^{n-3}(x_n - x_1) \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-3} & x_3^{n-3} & \dots & x_n^{n-3} \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$
\begin{gathered}
= (x_2 - x_1)\dots(x_n - x_1)W(x_2, \dots, x_n) = \\
= (x_2 - x_1)\dots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)\dots(x_n - x_2)W(x_3, \dots, x_n) = \dots \\
\dots = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j).
\end{gathered}
$$

□

Задача 5. *Пресметнете детерминантата от ред n*

$$
\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 + x_1 y_1 & 1 + x_1 y_2 & \dots & 1 + x_1 y_n \\ 1 + x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & \dots & 1 + x_2 y_n \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 + x_n y_1 & 1 + x_n y_2 & \dots & 1 + x_n y_n \end{vmatrix} .
$$

Решение. От свойствата на детерминантите имаме, че

$$
\Delta_n = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 + x_1 y_2 & \dots & 1 + x_1 y_n \\ 1 & 1 + x_2 y_2 & \dots & 1 + x_2 y_n \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 + x_n y_2 & \dots & 1 + x_n y_n \end{vmatrix}}_{\delta_1} + \underbrace{\begin{vmatrix} x_1 y_1 & 1 + x_1 y_2 & \dots & 1 + x_1 y_n \\ x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & \dots & 1 + x_2 y_n \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x_n y_1 & 1 + x_n y_2 & \dots & 1 + x_n y_n \end{vmatrix}}_{=\delta_2} .
$$

Първата детерминанта представяме като

$$
\delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 y_2 & \dots & 1 + x_1 y_n \\ 1 & x_2 y_2 & \dots & 1 + x_2 y_n \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & x_n y_2 & \dots & 1 + x_n y_n \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 + x_1 y_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 + x_2 y_n \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 + x_n y_n \end{vmatrix}}_{=0} = \dots
$$

$$
\dots = \begin{vmatrix} 1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ 1 & x_2 y_2 & \dots & x_2 y_n \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & x_n y_2 & \dots & x_n y_n \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x_1 y_2 & \dots & 1 \\ 1 & x_2 y_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & x_n y_2 & \dots & 1 \end{vmatrix}}_{=0} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ 1 & x_2 y_2 & \dots & x_2 y_n \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & x_n y_2 & \dots & x_n y_n \end{vmatrix} = 0,
$$

т.к. втория, третия и т.н. n-тия ред са пропорционални. За втората детерминанта имаме

$$\delta_2 = y_1 \begin{vmatrix} x_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ x_2 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x_n & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} =$$

$$= y_1 \left(\begin{vmatrix} x_1 & 1 & \dots & 1+x_1y_n \\ x_2 & 1 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x_n & 1 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ x_2 & x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x_n & x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}}_{=0} \right) = 0.$$

Следователно $\Delta_n = 0$.

Забележка: това разлгане на детерминантата е валидно само при $n \geq 3$, т.к иначе детерминантата не е достатъчно „голяма“, за да извършим всички тези стъпки. При $n = 1$ имаме, че $\Delta_1 = 1 + x_1y_1$, а при $n = 2$ $\Delta_2 = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$. □

Матрични рекурентни връзки:

Понякога е невъзмжно да сметнем детерминанта от произволен ред n само с преобразувания и използване на основните свойства. В някои случаи може да изразим детерминантата Δ_n като функция на съответните детерминанти от по-нисък ред $\Delta_{n-1}, \dots, \Delta_1$. Ще разгледаме случая, когато Δ_n зависи линейно от Δ_{n-1} и Δ_{n-2} или с други думи, когато

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} + b\Delta_{n-2}$$

за някакви числа a и b. Тогава имаме

$$\Delta_n - a\Delta_{n-1} - b\Delta_{n-2} = 0.$$

Да разгледаме съответстващото на този израз квадратно уравнение

$$t^2 - at - b = 0.$$

Ако t_1, t_2 са неговите корени, то според формулите на Виет имаме, че $t_1 + t_2 = a$ и $t_1t_2 = -b$. Замествайки това в рекурентната връзка, която изледваме, получаваме

$$\Delta_n = (t_1 + t_2)\Delta_{n-1} + t_1t_2\Delta_{n-2}.$$

Оттук едновременно следва, че

$$\Delta_n - t_1\Delta_{n-1} = t_2(\Delta_{n-1} - t_1\Delta_{n-2})$$

и

$$\Delta_n - t_2\Delta_{n-1} = t_1(\Delta_{n-1} - t_2\Delta_{n-2}).$$

От рекурентната връзка следва, че $\Delta_{n-1} - t_1\Delta_{n-2} = t_2(\Delta_{n-2} - t_1\Delta_{n-3})$. Замествайки това в първото равенство и продължавайки по веригата надолу, достигаме до извода, че

$$\Delta_n - t_1\Delta_{n-1} = t_2^{n-2}(\Delta_2 - t_1\Delta_1).$$

Аналогично стигаме до дъното на рекурсията във второто равенство и получаваме, че

$$\Delta_n - t_2\Delta_{n-1} = t_1^{n-2}(\Delta_2 - t_2\Delta_1).$$

Умножаваме предпоследното равенство с t_2, а последното с $-t_1$ и ги събираме, за да получим

$$(t_2 - t_1)\Delta_n = t_2^{n-1}(\Delta_2 - t_1\Delta_1) - t_1^{n-1}(\Delta_2 - t_2\Delta_1)$$

или с други думи, намираме, че

$$\Delta_n = \frac{t_2^{n-1}(\Delta_2 - t_1\Delta_1) - t_1^{n-1}(\Delta_2 - t_2\Delta_1)}{t_2 - t_1}.$$

В случая, когато $t_1 = t_2 = t$ след известно пресмятане намираме, че

$$\Delta_n = t^{n-2}(2t\Delta_1 - \Delta_2) + nt^{n-2}(\Delta_2 - t\Delta_1).$$

При всички положения, ако намерим рекурентна връзка, за пресмятането на детерминантата от произволен ред n ще е достатъчно да пресметнем детерминантите от първи и втори ред, както и да намерим корените на съответсващото на рекурентата връзка квадратно уравнение.

Задача 6. *Пресметнете детерминантата от ред n*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Нека да развием детерминантата по първи стълб. Имаме

$$\Delta_n = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}.$$

Първата детерминанта е просто Δ_{n-1}, а втората развиваме по първи ред. Така

$$\Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)},$$

т.е. получихме рекурентната връзка

$$\Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2}.$$

Съответното квадратно уравнение е

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

и то има корени $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$. Да пресметнем Δ_1 и Δ_2. Имаме, че $\Delta_1 = |3| = 3$ и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7$. Сега вече можем да определим Δ_n по формулата, която изведохме, а именно

$$\Delta_n = 2^{n-1}(\Delta_2 - \Delta_1) - (\Delta_2 - 2\Delta_1) = 2^{n-1}.(7-3) - (7-6) = 2^{n+1} - 1.$$

□