Метод на Гаус за решаване на системи линейни уравнения.

Да разгледаме системата с n на брой неизвестни и m на брой уравнения

$$\left|\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & =b_1, \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & =b_2, \\ \dots & & & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & =b_m. \end{array}\right.$$

Казваме, че наредената n-торка $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е решение на системата, ако при заместването ѝ в нея получим m верни числови равенства. Числата a_{ij} за $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, n$ се наричат коефициенти пред неизвестните – по-точно a_{ij} е коефициентът пред j-тото неизвестно в i-тото уравнение. Числата b_i за $i = 1, 2, \dots, m$ се наричат свободни неизвестни.

Матрицата от коефициентите пред неизвестните

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

се нарича матрица на системата, а матрицата от коефициентите пред неизвестните с присъединен стълб от свободните коефициенти

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

се нарича разширена матрица на системата.

Целта ни е да намерим решение на системата, извършвайки само елементарни гаусови преобразувания, а именно:

1) Разменяне на местата на два реда

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} ,$$

което записваме като $L'_k = L_i, L'_i = L_k$;

2) Умножаване на ред с ненулево число $\lambda \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \;\; | \cdot \lambda \;\; \longrightarrow \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} ,$$

което записваме като $L'_i = \lambda L'_i$;

3) Покомпонентно прибавяне на ред, умножен с число λ към друг ред на матрицата

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \lambda \\ \\ + \\ \\ \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} + \lambda a_{i1} & a_{k2} + \lambda a_{i2} & \dots & a_{kn} + \lambda a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} ,$$

което записваме като $L'_j = L_j + \lambda L_i$.

Методът на Гаус се състои в прилагането на тези елементарни преобразувания, за да се анулират някои от коефициентите и да се приведе системата, респективно матрицата на системата, във възможно най-прост (в идеалния случай триъгълен) вид.

Като първа стъпка можем, да считаме, че коефициентът a_{11} е ненулев. В противен случай просто бихме разменили редовете на матрицата така, че да си осигурим това. Последното няма как да се случи, ако целият първи стълб е съставен от нули, но този случай не представлява интерес, защото това на практика означава, че неизвестното x_1 не участва в системата. И така, за $a_{11} \neq 0$ умножаваме първия ред по $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ и го прибавяме към втория.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \begin{matrix} \urcorner {\scriptstyle -a_{21}/a_{11}} \\ \hookleftarrow {\scriptstyle +} \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Това очевидно анулира елемента във втория ред и първия стълб на матрицата, а за останалите имаме $a'_{2k} = a_{2k} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}} a_{1k}, k = 2, 3, \dots, n$ и $b'_2 = b_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}} b_1$.

Сега ще направим същото и с третия ред. Умножаваме първия ред на матрицата с $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ и го прибавяме към третия.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \begin{matrix} \urcorner {\scriptstyle -a_{31}/a_{11}} \\ \Big| \\ \hookleftarrow {\scriptstyle +} \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & \dots & a'_{3n} & b'_3 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

По този начин анулирахме елемента в третия ред и първия стълб на матрицата и имаме още $a'_{3k} = a_{3k} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}} a_{1k}, k = 2, 3, \dots, n$ и $b'_3 = b_3 - \dfrac{a_{31}}{a_{11}} b_1$.

Продължаваме по същата позната схема, за да анулираме всички останали елементи в първия ред и преработим матрицата във вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & \dots & a'_{3n} & b'_3 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix} .$$

Следващата стъпка е да направим същото с втория стълб на матрицата, анулирайки всички елементи от третия ред надолу. За да анулираме елемента a'_{32} умножаваме втория ред с $-\dfrac{a'_{32}}{a'_{22}}$ и го прибавяме към третия.

По този начин получаваме

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & \dots & a'_{3n} & b'_3 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix} \begin{array}{l} \urcorner^{-a'_{32}/a'_{22}} \\ \hookleftarrow_{+} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & \dots & a''_{3n} & b''_3 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix}$$

където $a''_{3k} = a'_{3k} - \dfrac{a'_{32}}{a'_{22}} a'_{2k}, k = 3, 4, \dots, n$ и $b''_3 = b'_3 - \dfrac{a'_{32}}{a'_{22}} b'_2$.

Продължаваме по същия метод, за да анулираме останалите елементи във втория стълб, надолу от третия. След това анулираме всички елементи в третия стълб, надолу от четвъртия и така нататък, последния елемент в $n-1$-вия стълб, докато стигнем до един от следните случаи:

1) Матрицата придобива триъгълен вид ($m = n$), а съответната разширена матрица има вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Ако $a_{mn} \neq 0$, но $b_n = 0$, то не съществува число x_n, такова че $a_{mn} x_n = b_m$. В такъв случай казваме, че системата е несъвместима.

Ако $a_{mn} \neq 0$, то тогава от съответстващото уравнение $a_{mn} x_n = b_m$ намираме, че $x_n = \dfrac{b_m}{a_{mn}}$. Сега, от предполседното уравнение

$$a_{m-1,n-1} x_{n-1} + a_{m-1,n} x_n = b_{m-1},$$

след като вече сме определили x_n, можем да открием, че

$$x_{n-1} = \frac{b_{m-1} - a_{m-1} x_n}{a_{m-1,n-1}}$$

и така нататък нагоре по веригата докато определим и

$$x_1 = \frac{b_1 - \sum_{k=2}^{n} a_{1k} x_k}{a_{11}}.$$

Така намерихме, единствено решение на системата $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и казваме, че тя е съвместима и определена.

Ако $a_{mn} = 0$ и $b_m = 0$, то уравнението $a_{mn}x_n = b_m$ има безбройно много решения относно x_n и при фиксиране на кое да е от тях получаваме различен набор решения $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на системата. В такъв случай казваме, че системата е съвместима и неопределена.

2) Матрицата има нулеви редове от изестно място нататък (m>n), т.е. разширената матрица има вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kn} & b_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_m \end{pmatrix}.$$

Ако някое от числата $b_{k+1}, \dots, b_m$ е различно от нула, то системата е несъвместима. Ако $b_{k+1} = \dots = b_m = 0$, то решението се свежда към първия случай, като за всяко от неизвестните $x_{k+1}, \dots, x_n$ имаме безброй възможности. В такъв случай системата е съвместима и неопределена.

3) Матрицата не може да бъде превърната изцяло в триъгълна ($m < n$), т.е. разширената матрица има вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1k} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2k} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{mk} & \dots & a_{m,n-1} & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

В такъв случай при произволно зададени стойности на $x_{k+1}, \dots, x_n$ можем да определим останалите неизвестни $x_1, \dots, x_k$. В такъв случай намираме безбройно много решения $(x_1, \dots, x_k; x_{k+1}, \dots, x_n)$ на системата и тя е съвместима и неопределена.

В частния случай, когато $b_1 = b_2 = \dots = b_m$, системата се нарича хомогенна. Тя винаги е съвместима тъй като очевидно $(0, 0, \dots, 0)$ е нейно решение.

Задача 1. *Решете системата*

a)

$$\left| \begin{array}{llll} x_1 & +2x_2 & +5x_3 & = -9, \\ x_1 & -x_2 & +3x_3 & = 2, \\ 3x_1 & -6x_2 & -x_3 & = 25, \end{array} \right.$$

б)

$$\left|\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 4, \\ x_1 & & +x_3 & = 2, \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 7, \end{array}\right.$$

в)

$$\left|\begin{array}{llll} x_1 & & -x_3 & = 2, \\ 2x_1 & +5x_2 & & = 7, \\ 3x_1 & +5x_2 & -x_3 & = 9. \end{array}\right.$$

Решение. Навсякъде изпозлваме метода на Гаус.

а) Започваме да преобразуваме разширената матрица на системата:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{pmatrix} .$$

Това означава, че сме преобразували системата във вида

$$\left|\begin{array}{llll} x_1 & +2x_2 & +5x_3 & = -9, \\ & -3x_2 & -2x_3 & = 11, \\ & & -8x_3 & = 8. \end{array}\right.$$

Според това, което казахме за метода на Гаус, системата е съвместима и определена. От последното уравнение намираме, че $x_3 = -1$. Имайки предвид това, второто уравнение

$$-3x_2 - 2x_3 = 11$$

се превръща в

$$-3x_2 + 2 = 11,$$

откъдето определяме $x_2 = -3$. Замествайки x_3 и x_2 в първото уравнение

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9,$$

получаваме

$$x_1 - 6 - 5 = -9,$$

откъдето определяме $x_1 = 2$. И така, единственото решение на системата е наредената тройка $(x_1, x_2, x_3) = (2, -3, -1)$.

б) По метода на Гаус преобразуваме разширената матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Както видяхме, в този случай системата е несъвместима, т.к. последното уравнение

$$0 \cdot x_3 = 1$$

не притежава решение.

в) Преобразуването на разширената матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 7 \\ 3 & 5 & -1 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

В такъв случай системата е съвместима,но неопределена. Нека изберем $x_3 = p$ за свободно неизвестно. Тогава определяме $x_2 = \dfrac{3-2p}{5}$ от второто уравнение, а след това $x_1 = 2+p$ от първото уравенение. В такъв случай системата има безброй решения от вида $\left(2+p, \dfrac{3-2p}{5}, p\right)$, където p е произволно число. $\square$

Задача 2. *Решете системата*

$$\left| \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +\lambda x_3 & = 1, \\ x_1 & +\lambda x_2 & +x_3 & = 1, \\ \lambda x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \end{array} \right.$$

в зависимост от сотйностите на параметъра λ.

Решение. Използваме метода на Гаус и преработваме разширената матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(1-\lambda) & 1-\lambda \end{pmatrix} .$$

И така, при $\lambda = 0$ получаваме системата

$$\left| \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1, \\ & -x_2 & +x_3 & = 0, \\ & & 0.x_3 & = 1, \end{array} \right.$$

която очевидно е несъвместима.

При $\lambda = 1$ получаваме системата

$$\left| \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1, \\ & 0.x_2 & +0.x_3 & = 0, \\ & & 0.x_3 & = 0. \end{array} \right.$$

Ако положим $x_2 = p, x_3 = q$, то тогава системата е съвместима и неопределена с решение $(1-p-q, p, q)$, зависещо от два параметъра.

При $\lambda \neq 0, 1$ системата е съвместима и определена с $x_3 = \dfrac{1}{\lambda}, x_2 = -\dfrac{1}{\lambda}$ и $x_1 = \dfrac{1}{\lambda}$. □