Евклидови пространства.

Нека V е линейно пространство над полето на реалните числа $\mathbb{R}$. Казваме, че V е евклидово пространство, ако в него има въведено скаларно произведение

$$(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

което изпълнява свойтвата
1) $(x,x) \geq 0$ за $\forall x \in V$ като $(x,x) = 0 \iff x = o$,
2) $(x,y) = (y,x)$ за $\forall x,y \in V$,
3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ за $\forall x_1, x_2, y \in V$,
4) $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$ за $\forall x, y \in V$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Всяко скаларно произведение поражда норма

$$\| \cdot \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

по правилото $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Нормата ни дава представа за „големината“ на даден вектор от пространството. Абсолютната стойност на реално число е типичен пример за норма.

Ако $e_1, \dots, e_n$ е базис на V спрямо който векторите $x, y \in V$ са

$$x = (x_1, \dots, x_n) \text{ и } y = (y_1, \dots, y_n),$$

то скаларното им произведение е дефинирано като

$$(x,y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Казваме, че векторите $x, y \in V$ са ортогонални и пишем $x \perp y$, ако $(x,y) = 0$.

В такъв случай различаваме три вида базиси на евклидовото пространство V: афинни - векторите в тях са линейно независими; ортогонални - векторите в тях са линейно независими и два по два ортогонални; ортонормирани - векторите в тях са линейно независими, два по два ортогонални и нормата им е 1.

Задача 1. *В четиримерното евклидово пространство V са дадени векторите*

$$a_1 = (1, -2, 3, 3), a_2 = (2, 1, 1, -3).$$

Допълнете a_1, a_2 до ортогонален базис на V.

Proof. Първо проверяваме дали $a_1 \perp a_2$. Имаме

$$(a_1, a_2) = 1.2 + (-2).1 + 3.1 + 1.(-3) = 0,$$

което означава, че това наистина е така. Търсим вектор $a_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, за който е изпълнено едновременно

$$\left| \begin{array}{ll} (a_1, a_3) & = 0, \\ (a_2, a_3) & = 0 \end{array} \right.$$

или с други думи, чиито координати удовлетворяват хомогенната система

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 0, \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & -3x_4 & = 0. \end{array} \right.$$

Решенията на системата зависят от два параметъра и имат вида

$$(2q - 17p, q, p, 2q - 10p).$$

При $p = 1, q = 0$ получаваме например $a_3 = (-17, 0, 1, -10)$.

Сега търсим вектор a_4, за който е изпълнено едновременно

$$\left| \begin{array}{ll} (a_1, a_4) & = 0, \\ (a_2, a_4) & = 0, \\ (a_3, a_4) & = 0. \end{array} \right.$$

Първите две равенства означават, че координатите на a_4 също удовлетворяват хомогенната система, която разглеждахме по-горе, т.е.

$$a_4 = (2q - 17p, q, p, 2q - 10p)$$

за някакви $p, q \in \mathbb{R}$. Остава само да ги определим от условието $(a_3, a_4) = 0$, което означава, че

$$-34q + 17.17p + p - 10q + 100p = 0,$$

откъдето намираме $p = \frac{9}{65}q$ и например при $q = 1$ получаваме вектора

$$a_4 = \left(\frac{18}{65} - 17, 1, \frac{9}{65}, 2 - \frac{90}{65}\right).$$

$\square$

Задача 2. *В четиримерното евклидово пространство V е даден афинният базис*

$$a_1 = (2, 1, 1, -1), \quad a_2 = (5, 0, 3, -1),$$

$$a_3 = (-3, -10, 3, 8), \quad a_4 = (-1, -1, 1, 5).$$

Намерете ортонормиран базис на V.

Решение. Първо ще използваме метода на Грам-Шмид, за да намерим взаимно отртогонални вектори b_1, b_2, b_3, b_4 на базата на a_1, a_2, a_3, a_4. Тъй като $\{a\}$ ебазис, то тогава векторите b_i също ще са линейно независими и ще образуват базис на V. И така, по метода на Грам-Шмид първо полагаме

$$b_1 = a_1 = (2, 1, 1, -1).$$

Вектора b_2 търсим във вида $b_2 = \alpha b_1 + a_2$, като числото $\alpha \in \mathbb{R}$ определяме от условието

$$0 = (b_1, b_2) = (b_1, \alpha b_1 + a_2) = \alpha(b_1, b_1) + (b_1, a_2),$$

и т.к. $b_1 = a_1 \neq o$, можем да запишем

$$\alpha = -\frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)} = -2.$$

Следователно

$$b_2 = -2b_1 + a_2 = (1, -2, 1, 1).$$

Вектора b_3 търсим във вида $b_3 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + a_3$, където числата $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ определяме от условията

$$\left| \begin{array}{ll} 0 & = (b_1, b_3) = \beta_1 (b_1, b_1) + \beta_2 \underbrace{(b_1, b_2)}_{=0} + (b_1, a_3), \\ 0 & = (b_2, b_3) = \beta_1 \underbrace{(b_2, b_1)}_{=0} + \beta_2 (b_2, b_2) + (b_2, a_3) \end{array} \right.$$

или по-конкретно

$$\beta_1 = -\frac{(b_1, a_3)}{(b_1, b_1)} = 3,$$

$$\beta_2 = -\frac{(b_2, a_3)}{(b_2, b_2)} = -4.$$

В такъв случай

$$b_3 = (-1, 1, 2, 1).$$

Вектора b_4 търсим във вида $b_4 = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \gamma_3 b_3 + a_4$, където числата $\gamma_{1,2,3} \in \mathbb{R}$ се определят от условията

$$\left| \begin{array}{ll} (b_1, b_4) & = 0, \\ (b_2, b_4) & = 0, \\ (b_3, b_4) & = 0 \end{array} \right.$$

или по-конкретно имаме

$$\gamma_1 = \frac{(b_1, a_4)}{(b_1, b_1)} = 1,$$

$$\gamma_2 = \frac{(b_2, a_4)}{(b_2, b_2)} = -1,$$

$$\gamma_3 = \frac{(b_3, a_4)}{(b_3, b_3)} = -1.$$

В такъв случай

$$b_4 = (1, 1, -1, 2)$$

и така намерените вектори образуват ортогонален базис на $\{b\}$ на V.

За да намерим ортонормиран базис $\{c\}$ тръгваме от вече намерения ортогонален базис $\{b\}$. На базата на векторите b_i трябва да построим вектори c_i, с единична норма. Изобщо казано, за произволен ненулев вектор $v \in V$ имаме, че $\|v\| > 0$. Да разгледаме вектора $w \in V$, зададен с $w = \dfrac{1}{\|v\|}v$. Неговата норма е

$$\|w\| = \left\| \frac{1}{\|v\|}v \right\| = \frac{1}{\|v\|}\|v\| = 1.$$

Следователно на базата на всеки ненулев вектор можем да построим вектор с единична норма. Ще приложим същия метод за намиране на базиса $\{c\}$. Имаме

$$c_1 = \frac{1}{\|b_1\|}b_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}b_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(2, 1, 1, -1),$$

$$c_2 = \frac{1}{\|b_2\|}b_2 = \frac{1}{\sqrt{7}}b_2 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, -2, 1, 1),$$

$$c_3 = \frac{1}{\|b_3\|}b_3 = \frac{1}{\sqrt{7}}b_3 = \frac{1}{\sqrt{7}}(-1, 1, 2, 1),$$

$$c_4 = \frac{1}{\|b_4\|}b_4 = \frac{1}{\sqrt{7}}b_4 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, -1, 2).$$

□

Задача 3. *В четirimерното евклидово пространство V е дадено подпорстранството $U = \ell(a_1, a_2, a_3, a_4)$, където*

$$a_1 = (1, -2, 2, 2), \quad a_2 = (-1, 9, -5, -5),$$

$$a_3 = (1, 5, -1, -1), \quad a_4 = (1, 12, -3, -5).$$

Намерете ортонормиран базис на U.

Упътване. Първо намерете афинния базис на U, измежду векторите a_1, a_2, a_3, a_4 като намерите някоя тяхна МЛНЗП. След това продължете както в Задача 2. □

Нека V е евклидово пространство, а $U \leq V$ е негово подпространство. Множеството

$$U^{\perp} = \{v \in V | (v, x) = 0 \text{ за } \forall x \in U\}$$

също е подпространство на V, наречено ортогонално допълнение на U. В сила е, че $U \oplus U^{\perp} = V$.

Задача 4. *В четиримерното евклидово пространство V е дадено подпространството U от решенията на хомогенната система*

$$\left|\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =0, \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & -2x_4 & =0. \end{array}\right.$$

Намерете ортонормиран базис на ортогоналното допълнение $U^{\perp}$ на U.

Упътване. Ако $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U$, то координатите му удовлетворяват хомогенната система. Можем да запишем системата като скаларно прозиведение на векторите $(1, 1, 1, 1)$ и $(2, 3, -1, -2)$ с x и оттук става ясно, че

$$a_1 = (1, 1, 1, 1) \text{ и } a_2 = (2, 3, -1, -2)$$

са ортогонални на всеки вектор $x \in U$. Проверете, че тези вектори са линейно независими. Оттам ще следва, че $\dim U = 4 - 2 = 2$ и $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U = 4 - 2 = 2$. Нещо повече, векторите от $\ell(a_1, a_2)$ са перпендикулярни на прозиволен вектор от U, откъдето следва, че $\{a\}$ всъщност образуват афинен базис на $U^{\perp}$. По метода на Грам-Шмид ортогонализирайте системата, а след това направете нормиране, за да намерите ортонормиран базис на $U^{\perp}$. □

Задача 5. *В четиримерното евклидово пространство V е зададено подпространството $U = \ell(a_1, a_2, a_3)$ като линейна обвивка на векторите*

$$a_1 = (1, 2, 0, 1), \quad a_2 = (3, 2, 1, 2), \quad a_3 = (1, -2, 1, 0).$$

Намерете ортонормиран базис на ортогоналното допълнение $U^{\perp}$ на U.

Упътване. Първо намерете базис на U като изберете някоя МЛНЗП на векторите a_1, a_2, a_3. Ще се окаже, че U е двумерно подпространство. Изберете негов базис b_1, b_2, например

$$b_1 = (1, 2, 0, 1) \text{ и } b_2 = (0, 4, -1, 1),$$

намерени след гаусови преобразувания над матрицата с вектор-редове $_1, _2, _3$. Тогава $U = \ell(b_1, b_2)$ и за произволен вектор $x \in U^{\perp}$ имаме, че

$$\left|\begin{array}{ll} (x, b_1) & = 0, \\ (x, b_2) & = 0. \end{array}\right.$$

Това всъщност означава, че координатите на произволен вектор от $U^{\perp}$ удовлетворяват хомогенната система

$$\left|\begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = 0, \\ & +4x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0 \end{array}\right.$$

или с други думи $U^{\perp}$ съвпада с пространството от нейните решения. В такъв случай всяка една ФСР на системата задава базис на $U^{\perp}$. Фиксирайте един афинен базис, а след това го ортогонализирайте по метода на Грам-Шмид и го нормирайте.
Примерен афинен базис (ФСР на системата):

$$c_1 = (-2, 1, 4, 0), \quad c_2 = (-1, 0, 1, 1).$$

След ортогонализация:

$$d_1 = (-1, 0, 1, 1), \quad d_2 = (0, 1, 2, -2).$$

След нормиране:

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 0, 1, 1), \quad h_2 = \frac{1}{3}(0, 1, 2, -2).$$

$\square$