Комплексни числа.

Множеството на комплексните числа може да бъде отъждествено с множеството от точки, лежащи в една (комплексната) равнина. Алгебрически то се описва като наредена двойка реални числа чрез

$$\mathbb{C} = \{z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}.$$

Числото x се нарича реална, а числото y имагинерна част на z. За две комплексни числа $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ с $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$ имаме, че $z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

В множеството $\mathbb{C}$ са дефинирани операции събиране иумножение по следния начин

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

Числото $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$ се нарича модул на комплексното число z и както при реалните числа показва разстоянието от образа на числото z до пресечната точка $(0, 0)$ на реалната и имагинерната ос. Ясно е, че $|z| = 0 \iff z = 0$.

Ако $z = x + yi \in \mathbb{C}$, то числото $\overline{z} = x - yi \in \mathbb{C}$ се нарича негово комплексно спрегнато. То е негово симетрично спрямо реаланата ос. Директно се вижда, че $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 \geq 0$.

Задача 1. *Решете уравнението*

$$|z| + (1 - i)z = 4 + 7i.$$

Решение. Представяме $z \in \mathbb{C}$ като $z = x + yi$ за $x, y \in \mathbb{R}$. Така имаме

$$\sqrt{x^2 + y^2} + (1 - i)(x + yi) = 4 + 7i,$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x + y + (y - x)i = 4 + 7i$$

и остава да решим системата

$$\left| \begin{array}{rl} \sqrt{x^2+y^2}+x+y & =4, \\ y-x & =7. \end{array} \right.$$

От второто уравнение изразяваме $y = x+7$ и замествайки това в първото получаваме уравнението

$$\sqrt{2x^2+14x+49} = -3-2x,$$

което има смисъл при $x \le -\frac{3}{2}$. След катоповдигне двете страни на квадрат получаваме уравнението

$$2x^2-2x-40=0,$$

като единсвеният корен, попадащ в дефиниционната област, е $x = -\frac{9}{2}$. Тогава $y = \frac{5}{2}$ и $z = -\frac{9}{2}+\frac{5}{2}i$. $\square$

Нека $z \in \mathbb{C}$, $r = |z| \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in [0, 2\pi)$ е ъгълът, който радиус-векторът на образа на числото z сключва с положителната посока на реалната ос. Тогава, ако $z = x + yi$, то $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$ и записваме $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Този запис се нарича тригонометричен вид на комплексното число z. Ъгълът α се нарича аргумент на z. Тригонометричният вид е особено удобрен за пресмятане на степените на комплексни числа. В сила е формулата на Моавър

$$z^n = r^n \left(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)\right).$$

В множеството на комплексните числа уравнението

$$x^n = z$$

има винаги n на брой корена. В частност, уравенението

$$x^n = 1$$

също има n на брой корена $\omega_k = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi$ за $k = 0, 1, \ldots, n-1$, наречени n-ти корени на единицата. Ако $z \in \mathbb{C}$ е такова, че $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, то в сила е формулата на Моавър за коренуване

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right), k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Задача 2. *Извършете означените действия в множеството на комплексните числа.*

а) $\dfrac{2+3i}{1-i}$,

б) $\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{6k}$, $k \in \mathbb{Z}$,

в) $\sqrt{2i}$.

Решение. а) За да елиминираме имагинерната част на знаменателя, разширяваме цялата дроб с комплексно спрегнатото му. По този начин получаваме реално число в знаменател и можем да продължим нататък. Имаме

$$\frac{2+3i}{1-i} = \frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+5i}{2} = -\frac{1}{2}+i\frac{5}{2}.$$

б) Да превърнем числото $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ в тригонометричен вид. За произволно комплесно число $z = x+yi$ търсим представяне от вида $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Имаме, че

$$r = |z| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1.$$

От $x = r\cos\alpha$ и $y = r\sin\alpha$ намираме, че $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x} = \sqrt{3}$, т.е. $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$. Така намерихме, че

$$z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

Сега по формулата на Моавър

$$z^{6k} = \cos 4k\pi + i\sin 4k\pi = 1.$$

в) Или процедираме като в подточка б) и намираме тригонометричния вид на $2i$, а след това използваме формулата на Моавър за коренуване, или търсим комплексно число $z = x+yi$, такова че $(x+yi)^2 = 2i$. Това означава, че

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 2i$$

и трябва да е изпълнена реалнозначната система

$$\left|\begin{array}{rl} x^2-y^2 & = 0, \\ 2xy & = 2, \end{array}\right.$$

чието решение е $x = \pm 1, y = \pm 1$. Тогава имаме $z_1 = 1+i, z_2 = -1-i$. $\square$

Задача 3. *Решете уравненията в множеството на комплексните числа.*

а) $x^4 = \sqrt{3} + i$,

б) $x^2 + 2x + 3 = 0$,

в) $x^2 - (3 + 7i)x - 10 + 11i = 0$.

Решение. а) Имаме, че $\sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$. Тогава по формулата на Моавър за коренуване имаме, че

$$x = \sqrt[4]{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\pi 6\right)} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{4}\right), k = 0, 1, 2, 3.$$

б) Използваме добре познатата формула за корените квадратно уравнение. Дискриминантата е $D = -2$ и следователно

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}i.$$

в) Отново чрез формулата за корените за квадратното уравнение намираме, че $D = -2i$ и $\sqrt{D} = \pm(1 - i)$. Тогава

$$x_{1,2} = \frac{3 + 7i \pm (1 - i)}{2}.$$

□