9.Лява и дясна граница на функция. Основни граници

Определение 9.1: Казваме, че $f(x)$ клони към L при $x \to x_0$ отляво, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че от $x_0 - \delta < x < x_0$ да следва $|f(x) - L| < \varepsilon$. Записваме $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = L$ или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = L$.

Забележка: Изречението „$f(x)$ клони към L при $x \to x_0$ отляво“ може да се изкаже еквивалентно по следните начини: „$f(x)$ има граница L отляво при $x \to x_0$“ и „лявата граница на $f(x)$ при $x \to x_0$ е L.“

Определение 9.2: Казваме, че $f(x)$ клони към L при $x \to x_0$ отдясно, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че от $x_0 < x < x_0 + \delta$ да следва $|f(x) - L| < \varepsilon$. Записваме $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = L$ или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = L$.

Забележка: Изречението „$f(x)$ клони към L при $x \to x_0$ отдясно“ може да се изкаже еквивалентно по следните начини: „$f(x)$ има граница L отдясно при $x \to x_0$“ и „дясната граница на $f(x)$ при $x \to x_0$ е L.“

Пример 9.1: Да се пресметнат лявата и дясната граница на функцията $f(x) = x^2$ при $x = 7$. Отговор: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = 49 = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Пример 9.2: Да разгледаме функцията

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 7 \\ 0, & x = 7. \end{cases}, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Може да се докаже, че $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = 49 = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Пример 9.3: Да разгледаме функцията:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{ако } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Лявата граница на $f(x)$ при $x \to 1$ е 0, а дясната граница на $f(x)$ при $x \to 1$ е 1. Затова и функцията няма граница при $x \to 1$.

Пример 9.4: Да разгледаме функцията:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ако} x \leq 0 \\ x, & \text{ако} 0 < x \end{cases}$$

Лявата граница на $f(x)$ при $x \to 0$ е 0, а дясната граница на $f(x)$ при $x \to 1$ също е 1. Функцията има граница при $x \to 0$ и тя е 0.

Еквивалентно лява и дясна граница на функция могат да се дефинират чрез дефиницията на Хайне:

Определение 9.3: Нека $f(x)$ е дефинирана в множеството D и нека x_0 е точка на сгъстяване за $D \cap (-\infty, x_0)$. Ще казваме, че $f(x)$ клони към L при $x \to x_0$ отляво, когато каквата и клоняща към x_0 редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ от точки от $D \cap (-\infty, x_0)$ да изберем (т.е. $x_n < x_0$), съответната редица от функционални стойности $\{f(x_n)\}$ да клони към L.

Определение 9.4: Нека $f(x)$ е дефинирана в множеството D и нека x_0 е точка на сгъстяване за $D \cap (x_0, +\infty)$. Ще казваме, че $f(x)$ клони към L при $x \to x_0$ отдясно, когато каквата и клоняща към x_0 редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ от точки от $D \cap (0, +\infty)$ да изберем (т.е. $x_n > x_0$), съответната редица от функционални стойности $\{f(x_n)\}$ да клони към L.

Твърдение 9.1: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = L$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = L$.

Доказателство:
$\Rightarrow$) Нека $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. Ще докажем, че $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = L$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = L$. Фиксираме $\varepsilon > 0$. От дефиницията на граница на функция следва, че съществува $\delta > 0$ такова, че от $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ да следва $|f(x) - L| < \varepsilon$. Следователно съществуват лявата и дясната граница на функцията.

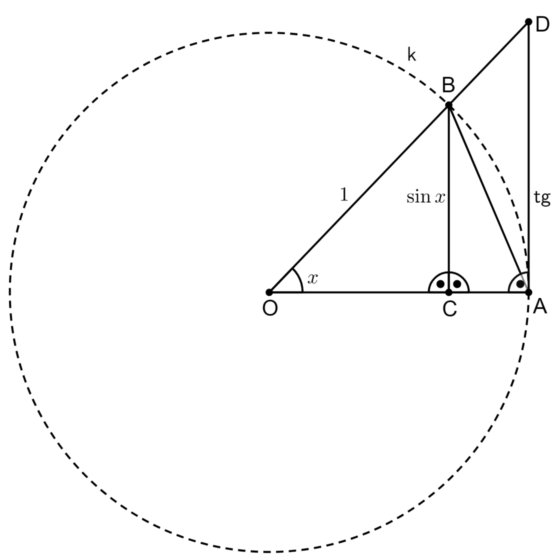
$\Leftarrow$) Нека $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = L$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = L$. Ще докажем, че $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$. Фиксираме $\varepsilon > 0$. От дефиницията на лява граница на функция следва, че съществува $\delta_1 > 0$ такова, че от $x_0 - \delta_1 < x$ да следва $|f(x) - L| < \varepsilon$. От дефиницията на дясна граница на функция следва, че съществува $\delta_2 > 0$ такова, че от $x < x_0 + \delta_2$ да следва $|f(x) - L| < \varepsilon$. Следователно съществуват лявата и дясната граница на функцията. Нека въведем означението $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогава съществува $\delta > 0$ такова, че от $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ да следва $|f(x) - L| < \varepsilon$. Следователно съществува границата на функцията и тя е равна на L.

Основни граници и следствия от тях:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1;$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1;$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1;$
5. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

<u>Доказателство:</u>

1. Нека k е единична окръжност с център O и $\angle AOB$ е централен ъгъл с големина x. Построяваме височината от B в $\triangle AOB$ и допирателната към k в A, t_A. Нека $D = t_A \cap l_{OB}$, където l_{OB} е права-



та, минаваща през B и O. Следното неравенство между лицето на $\triangle AOB$ ($S_{\triangle AOB}$), лицето на $\triangle AOD$ ($S_{\triangle AOD}$) и лицето на сектора, съответстващ на дъгата AB ($S_{k_{AB}}$):

$$S_{\triangle AOB} < S_{k_{AB}} < S_{\triangle AOD}$$

е изпълнено за $0 < x < \pi/2$. Тъй като $AB = \sin x$ (по дефиницията за синус) и $AD = \operatorname{tg} x$ (по дефиницията за тангенс), то $S_{\triangle AOB} = \frac{\sin x}{2}$ и $S_{\triangle AOD} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$. Лицето на сектора е

$$\begin{aligned} S_{k_{AB}} &= (\text{част от лицето на кръга}).(\text{лицето на единичния кръг}) \\ &= \frac{x}{2\pi}(\pi.1^2) = \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

За $x \in (0, +\pi/2)$ е изпълнено, че

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \Leftrightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x \tag{1}$$

Делим последното неравенство на $\sin x$, което е положително за $x \in (0, +\pi/2)$, и получаваме

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \cos x. \tag{2}$$

Последното неравенство е изпълнено и за $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, тъй като

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{-x}{\sin(-x)},\ \cos(x) = \cos(-x)$$

Така заключваме, че

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \cos x \text{ за } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) / \{0\}.$$

Пускаме x да клони към 0 и стигаме до извода:

$$1 \leq \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \leq \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

по лемата за двамата полицаи за функции. Еквивалентно $\frac{\sin x}{x} = 1$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\cos 0} \cdot 1 = 1.$

3. Нека да въведем означенията:

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{x},\ [-1,1]\,/\{0\} \to \mathbb{R}$$
$$g(y) = \sin(y),\ \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]/\{0\} \to [-1,1]\,/\{0\}.$$

   Тогава
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0} f(g(y)) = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = 1.$$

   В последната сметка сме взели предвид, че от $x \to 0$ следва $y = \sin x \to 0$.

4. Аналогично на предишното доказателство.