8.Граници на функции. Еквивалентност на дефинициите на Хайне и Коши. Свойства на границите

Тук ще се опитам кратко да отговоря на въпроса къде на практика се използват граници на функции. Често в практиката при описване на реални процеси, използваме функции. Понякога не можем да пресметнем търсената стойност на функцията в определена точка, а същевременно ни е необходима тази информация. Границите на функции ни дават информация какво се случва със стойността на функцията като се доближим безкрайно много до аргумента.

Пример 8.1: Да разгледаме функцията $f(x) = \frac{1}{x}$. От училище е известно, че не може $x = 0$, защото на нула не се дели. Но въпросът тук е друг: Какво се случва като се приближаваме все повече и повече към 0?

Преди да продължим към дефиницията за граница на функция, ще си припомним определението за точка на сгъстяване на множество:

Определение 8.1: Казваме, че x_0 е точка на сгъстяване за множеството от реални числа D, ако във всяка околност на точката x_0 има елементи от множеството D, различни от x_0.

Забележка: Определението означава, че колкото и малка пробита околност на точката на сгъстяване да вземем винаги ще има елементи на множеството в тази околност.

Пример 8.2: Очевидно, която и точка да вземем от множеството на реалните числа, тя е точка на сгъстяване, защото във всяка околност на тази точка има безброй много реални числа.

Пример 8.3: Да разгледаме множеството $X = (0, +\infty)$. Това множество съдържа само положителни елементи и не съдържа 0. Но 0 е точка за сгъстяване на множеството X, защото колкото и малка околност $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ да вземем, то в нея винаги ще имаме положителен елемент от X.

Твърдение 8.1: Дадена е редица $\{a_n\}$ и X е множество с елементи членовете на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$X = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}.$$

Ще докажем, че ако x_0 е точка на сгъстяване за X, то x_0 е точка на сгъстяване за редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказателство:

Да допуснем противното, т.е. x_0 е точка на сгъстяване за X, но x_0 не е точка на сгъстяване за редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Следователно съществува околност на точката x_0 такава, че в нея има само краен брой елементи на редицата. Това пък от своя страна означава, че съществува по-малка околност на точката x_0, в която се намира само тя. Следователно x_0 не е точка на сгъстяване за множеството X (от определението за точка на сгъстяване за множество). Това противоречи на допускането. ■

Забележка: Но не е в сила обратното, т.е. от x_0 е точка на сгъстяване за редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **не следва** x_0 е точка на сгъстяване за X. За да докажем това, е достатъчно да дадем контрапример. Да разгледаме редицата:

$$1, 1, 1, ...$$

Точката 1 е точка на сгъстяване за редицата $a_n = 1$, но не е точка на сгъстяване за множеството $\{1\}$.

Твърдение 8.2: Точката x_0 е точка за сгъстяване на D тогава и само тогава, когато съществува редица x_n от елементи на D ($x_n \neq x_0$) такава, че $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$.

Доказателство:

$\Rightarrow$) Нека точката x_0 е точка за сгъстяване на D. Ще докажем, че съществува редица x_n от елементи на D ($x_n \neq x_0$), която да клони към x_0. Нека да построим редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ по следния начин. Разглеждаме интервала $(x_0 - 1, x_0 + 1)$. Избираме от него една произволна точка $x_1 \neq x_0$. Намаляваме дължината на симетричния интервал 2 пъти, т.е. разглеждаме $(x_0 - 1/2, x_0 + 1/2)$. Избираме от този интервал произволна точка $x_2 \neq x_0$. И така нататък. На k-та стъпка получаваме интервала $(x_0 - 1/2^{k-1}, x_0 + 1/2^{k-1})$, от който избираме произволна точка $x_k \neq x_0$. Остава да докажем, че получената по този начин редица е сходяща. За целта фиксираме ε_0. Тогава съществува $\eta_0 \in \mathbb{N}$ такова, че

$$x_0 - \varepsilon_0 < x_0 - \frac{1}{2^{\eta_0 - 1}} < x_n < x_0 + \frac{1}{2^{\eta_0 - 1}} < x_0 + \varepsilon_0$$

при $n > \eta_0$. Причината да е изпълнено за всяко $n > \eta_0$ е, че интервалите са вложени един в друг. С това доказахме правата посока.

$\Leftarrow$) Нека $\{x_n\}$ е редица от елементи на D ($x_n \neq x_0$), която да клони към x_0. Ще докажем, че точката x_0 е точка за сгъстяване на D. По дефиницията за сходимост на редица получаваме, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\eta \in \mathbb{N}$ такова, че $|x_n - x_0| < \varepsilon$ при $n > \eta$. Фиксираме ε_0. Тогава съществува ε_1:

$$x_0 - \varepsilon_0 < x_0 - \varepsilon_1 < x_n < x_0 + \varepsilon_1 < x_0 + \varepsilon_0$$

от дефиницията за сходимост на редица. Следователно съществуват безброй много членове на редицата във всяка ε_0-околност на x_0. И от тук точката x_0 е точка за сгъстяване на D. ■

Сега ще въведем понятието граница на функция. Но преди това искам да Ви насоча да продължете да четете след определението (дори и да не сте успели да го разберете напълно). Там съм дописала допълнителни разяснения и примери, които биха могли да ви помогнат в това начинание.

Определение 8.2 (на Коши): Нека $f(x)$ е функция с дефиниционна област D и нека x_0 е точка на сгъстяване за D. Ще казваме, че числото L е граница на $f(x)$ при x, клонящо към x_0, ако при всеки избор на положителното число ε може да се намери $\delta > 0$ такова, че от условията $x \in D, x \neq x_0$ и $|x - x_0| < \delta$ да следва неравенството $|f(x) - L| < \varepsilon$. Тогава пишем $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ (четем „$f(x)$ клони към l при x клонящо към x_0“).

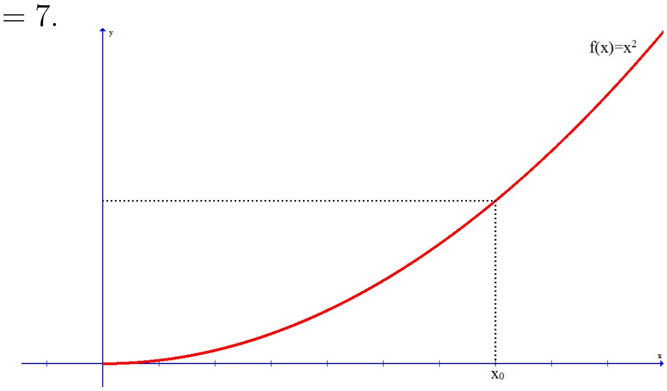
Забележка 1: Интуитивно казано: когато x се доближава до x_0, стойността на $f(x)$ се доближава много до някакво число L.

Забележка 2: Защо е необходимо x_0 да е точка на сгъстяване на множеството D? Ако x_0 не е точка на сгъстяване, то тогава няма да има точки от множеството във всяка нейна пробита $\varepsilon-$околност. Следователно няма да е възможно да пресметнем, какво се случва в близост на точката x_0. Причината за това е, че няма да има елементи на множеството, които са безкрайно близко до аргумента на функцията.

Забележка 3: Защо в определението се иска $x \neq x_0$? Защото искаме да пресметнем какво се случва безкайно близко до точката x_0, а не – в нея.

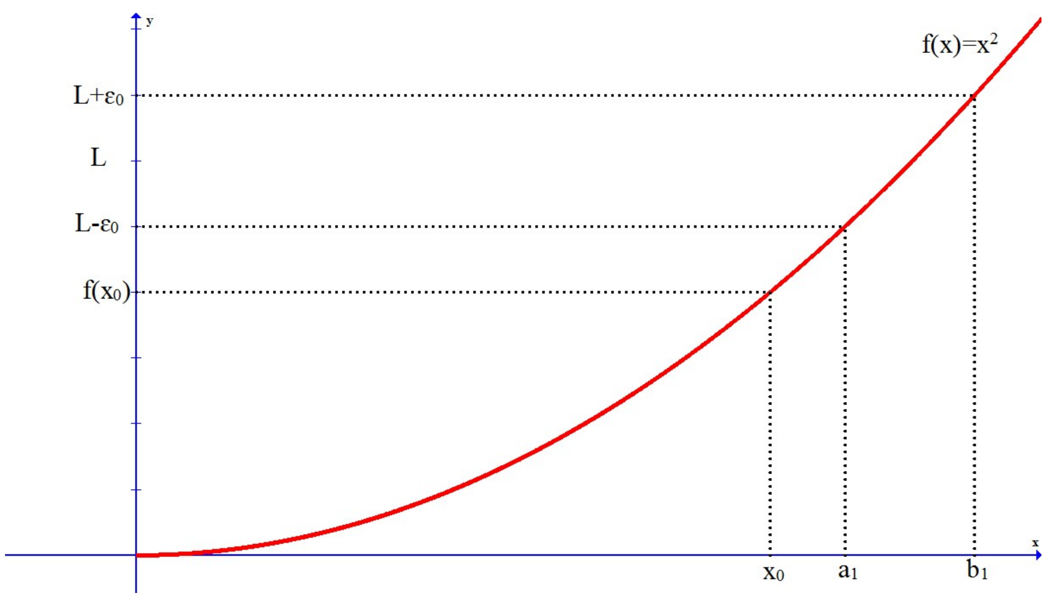
Забележка 4: Важно е да се отбележи, че $L \neq f(x_0)$ в общия случай. Първо $f(x_0)$ може да не е дефинирано, а границата да си съществува. Второ границата може да не съществува, но $f(x_0)$ да може да се пресметне. Трето възможно е границата да съществува и $f(x_0)$ е дефинирано, но просто двете числа да не са равни. За по-подробни разяснения прегледайте примерите по-долу.

Пример 8.4: Да се пресметне границата на функцията $f(x) = x^2$ при $x = 7$.



- **интуитивно обяснение защо $L = 49$.** Първо да разгледаме графиката. Трябва да пресметнем границата на функцията при $x_0 = 7$. Ясно е, че можем да сметнем $f(7) = 49$. От графиката виждаме, че точките, които се намират супер близо до $x_0 = 7$, би трябвало да отидат в точки, които се намират близо до 49.

- **графично обяснение защо $L = 49$.** Ще докажем, че границата на функцията $f(x) = x^2$ при $x \to 7$ е 49, като за целта използваме графиката на функцията. Да допуснем, че $L \neq 49$. Без да ограничаваме общността ще считаме, че $L > 49$. Тогава съществува $\varepsilon_0 > 0$ такова, че да е изпълнено $f(x_0) < L - \varepsilon_0 < L < L + \varepsilon_0$. Нека да чертаем прави $y = L - \varepsilon_0$ и $y = L + \varepsilon_0$, които са успоредни на абцисата. Проектираме пресечните точки на правите с функцията върху абсцисата и получаваме

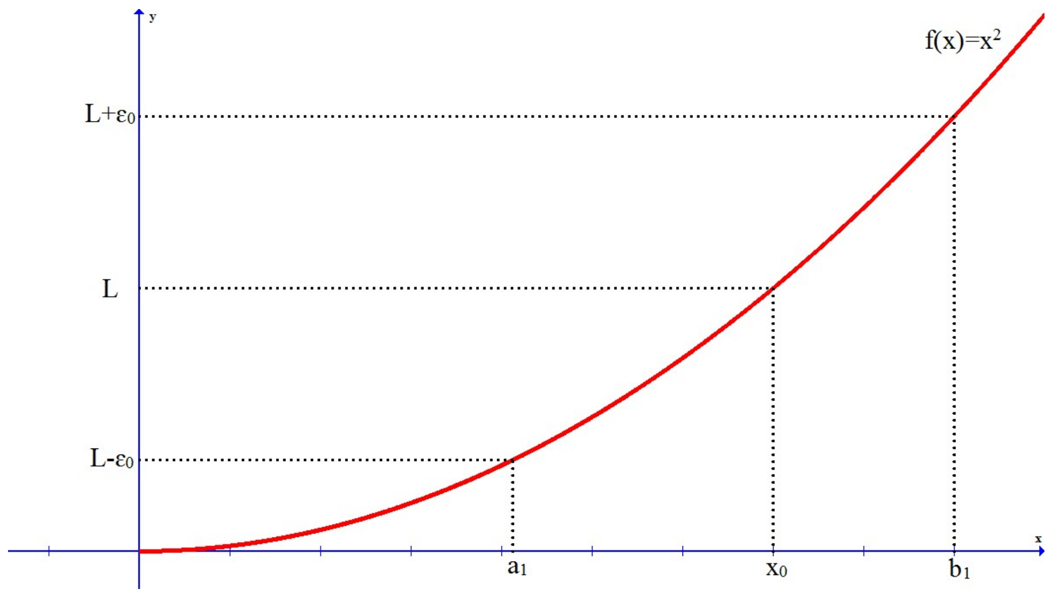


Остава да изберем $\delta > 0$ такова, че от $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\ \{x_0\}$ да следва неравенството $f(x) \in (L - \varepsilon_0, L + \varepsilon_0)$ (по дефиниция за граница на функция). От чертежа можем да заключим, че каквото и $\delta > 0$ да изберем, е невъзможно да е изпълнено това условие. Причината за това е следната. Тъй като околността на точката x_0 е симетрична, то в тази околност съществува $x^* < x_0$. Следователно[1]

[1] На практика тук използваме факта, че функцията е монотонно растяща

$f(x) < f(x_0) < L - \varepsilon_0 < L$, което противоречи на определението.

- **Илюстрация на дефиницията на граница на функция.** Нека да изберем $\varepsilon_0 = 32$. Според определението трябва да намерим $\delta_0 > 0$ такова, че от $|x - x_0| < \delta_0$, $x \neq x_0$ да следва $|f(x) - L| < \varepsilon_0$. В конкретния пример трябва да намерим $\delta_0 > 0$ такова, че от $x \in (7 - \delta_0, 7 + \delta_0)$ да следва $f(x) \in (49 - 32, 49 + 32) = (17, 81)$. Нека да начертаем $y = 17$ и $y = 81$, които успоредни на абцисата и минават през точките (0,17) и (0,81). Техните пресечните точки с графиката на функцията проектираме върху абцисата и получаваме точките $a_1 = (\sqrt{17}, 0)$ и $b_1 = (\sqrt{81}, 0)$ (виж графиката по-долу).



  Искаме да намерим $\delta_0 > 0$ такова, че от $x \in (7 - \delta_0, 7 + \delta_0)$ да следва $f(x) \in (17, 81)$. Следователно интервалът $(7 - \delta_0, 7 + \delta_0)$ трябва да принадлежи на $[a_1, b_1]$ (Защо?). Нека да изберем $\delta_0 = 2$. Тогава $b_1 = 9 = 7 + \delta_0$, а точката $x_0 - \delta_0 \in [a_1, b_1]$. Тогава от $|x_0 - 7| < \delta_0$ следва, че $|f(x) - L| < \varepsilon_0$. [2]

- **Строго доказателство.** Трябва да докажем, че границата на $f(x) = x^2$ при $x \to 7$ е 49. За тази цел трябва да докажем, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че от $|x - 7| < \delta$ да следва $|x^2 - 49| < \varepsilon$.

[2] Всяко $\delta_0 < 2$ също би ни довело до същия извод.

Задаваме $\varepsilon > 0$ произволно. Тогава трябва да намерим $\delta > 0$ такава, че от $|x-7| < \delta$ да следва $|x^2-49| < \varepsilon$. Доказателство на такива задачи се свежда до следните стъпки. Първа стъпка приемаме, че $|x-7| < \delta$ е изпълнено. Втора стъпка трябва да ограничим $|x^2-49|$ отгоре чрез израз, който се състои само от делти и числа и може да стане число много близко до 0, като използваме неравенството $|x-7| < \delta$. В тази стъпка обикновено се процедира с верига от неравенства. Пресмятаме последователно

$$|x^2-49| = |x-7| \cdot |x+7| < \delta \cdot |7+\delta+7| = (14+\delta)\delta$$

Полагаме изразът $(\delta+7)^2 - 49 = \varepsilon$, то тогава $\delta = \sqrt{\varepsilon + 49} - 7$. ■

Пример 8.5: Да разгледаме функцията

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 7 \\ 0, & x = 7. \end{cases}, \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Може да се докаже, че

$$f(7) = 0 \neq 49 = \lim_{x \to 7} f(x).$$

Доказателството на последното равенство е същото като в предния пример.

Пример 8.6: Да разгледаме функцията

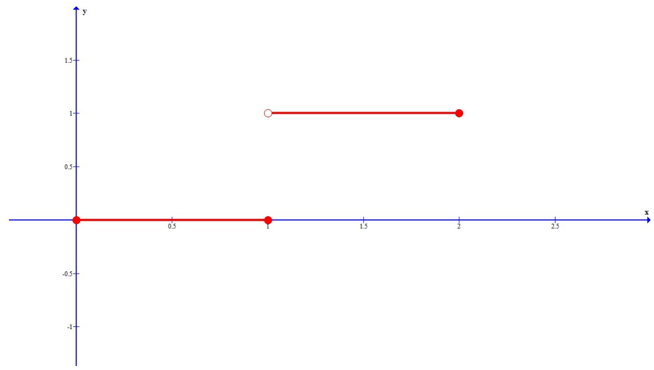
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \ f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}.$$

При $x = 0$ функцията не е дефинирана, но $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$ (последното твърдение ще го докажем в следващата тема).

Пример 8.7: Да разгледаме функцията:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ \text{ако } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, \ \text{ако } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Графиката на функцията изглежда така:



Тази функция няма граница при $x \to 1$. На интуативно ниво – тази функция няма граница при $x \to 1$, защото когато се доближим много близко до $x_0 = 1$ от ляво се доближаваме безкрайно близо до 0, а ако се доближим от дясно – 1. Тъй като получаваме различни числа, като се доближим от двете страни, то функцията няма граница при $x_0 = 0$. Да преминем към доказателството. Да допуснем противното, т.е. функцията има граница при $x \to 1$. Избираме $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Тогава трябва да намерим $\delta > 0$ такова, че ако $|x - x_0| = |x - 1| < \delta$, то $|f(x) - L| < \varepsilon = \frac{1}{4}$. Пресмятаме

$$|f(x) - L| = \begin{cases} |0 - L| = |L|, & \text{ако } x \leq 1, \\ |1 - L|, & \text{ако } 1 < x. \end{cases}$$

Тогава от неравенството $|f(x) - L| < \frac{1}{4}$ следва

$$\left| \begin{array}{rcl} -\dfrac{1}{4} < & L & < \dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{4} < & 1 - L & < \dfrac{1}{4} \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{rcl} -\dfrac{1}{4} < & L & < \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3}{4} < & L & < \dfrac{5}{4} \end{array} \right.$$

така достигнахме до противоречие.■

Забележка: Един по-наблюдателен читател би запитал защо да сме достигнали до противоречие. Ние никъде не сме доказали, че съществува единствено число L, което удовлетворява определението на Коши. Сега ще докажем това.

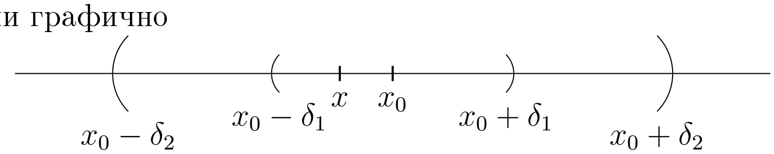
Твърдение 8.3: Една функция или клони към единствено число при $x \to x_0$, или въобще няма граница при $x \to x_0$.

Доказателство:

Допускаме противното, т.е. че съществуват две различни числа L_1 и L_2, които са граница на функцията $f(x)$ при x клонящо към x_0. Нека D е дефиниционното множеството на функцията f. Понеже $L_1 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то за всяко $\varepsilon_1 > 0$ съществува $\delta_1 > 0$ такова, че от условията $x \in D\ \{x_0\}$ и $|x - x_0| < \delta_1$ да следва неравенството $|f(x) - L_1| < \varepsilon_1$. Понеже $L_2 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то за всяко $\varepsilon_2 > 0$ съществува $\delta_2 > 0$ такова, че от условията $x \in D\ \{x_0\}$ и $|x - x_0| < \delta_2$ да следва неравенството $|f(x) - L_2| < \varepsilon_2$. Избираме $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{|L_1 - L_2|}{2} > 0$. Тогава съществува точка $x \neq x_0$ от D, за която да е изпълнено едновременно $|x - x_0| < \delta_1$ и $|x - x_0| < \delta_2$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $\delta_1 < \delta_2$. Тогава

$$|x - x_0| < \delta_1 < \delta_2$$

или графично



Така получаваме следната верига от неравенства:

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |L_1 - L_2|. \end{aligned}$$

Така получихме, че $|L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$. От където достигнахме до противоречие[3] с допускането, че съществуват 2 различни граници на функцията при $x \to x_0$. Следователно една функция не може да притежава 2 различни граници при x, клонящо към x_0 – тя или клони към единствено реално число, или няма граница. ■

Граница на функция може да се въведе и чрез следната дефиниция:

Определение 8.3 (на Хайне): Нека $f(x)$ е дефинирана в множеството D и нека x_0 е точка на сгъстяване за D. Ще казваме, че $f(x)$ има граница, равна на L, когато каквата и клоняща към x_0 редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ от точки от D да изберем (за които $x \neq x_0$) съответната редица от функционални стойности $\{f(x_n)\}$ да клони към L.

[3]Противоречието се дължи на факта, че всъщност $L_1 = L_2$ и следователно сме избрали $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$.

Забележка 1: Дефиницията на Хайне се оказва по-удобна за използване при голяма част от доказателствата. Причината за това е, че тя се основава на понятието „редица“, за което сме доказали много свойства и твърдения.

Забележка 2: В първото твърдение в темата доказахме, че за всяка точка на сгъстяване x_0 на дадено множество можем да намерим редица, клоняща към x_0. В определението се казва, че трябва да разгледаме всички редици $\{x_n\}$, клонящи към x_0 (т.е. всички редици, които в безкрайност се намират супер близко до точката x_0). За тях трябва да пресметнем границите на редиците $\{f(x_n)\}$. Ако всички тези граници са равни на число L, то казваме, че функцията има граница.

Твърдение 8.4: Дефиницията на Коши и дефиницията на Хайне за граница на функция са еквивалентни.

Твърдение 8.5: Ако $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, то

- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$;
- Ако $g(x) \neq 0$ и $B \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Твърдение 8.6: Нека

- $f : D \to D_1$ и $g : D_1 \to \mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, като $f(x) \neq y_0$;
- $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = A$.

Тогава $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = A$.

Твърдение 8.7: Нека $f(x) \leq g(x)$ за $x \in D(f) \cap D(g)$, където $D(f)$ и $D(g)$ са дефиниционните множества съответно на функцията f и g. Ако $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, то $A \leq B$.