7.Най-голяма и най-малка точка на сгъстяване

Нека X е множество от точките на сгъстяване за редицата $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Определение 7.1: Ако X е ограничено отдолу и $x_0 = \inf X$, то ще наричаме x_0 долна точка на сгъстяване за редицата $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. Този факт ще бележим по следния начин: $x_0 = \lim_{n\to\infty} \inf\ c_n$. Ако множеството X е неограничено отдолу, ще наричаме $-\infty$ долна точка на сгъстяване за X и ще пишем $\lim_{n\to\infty} \inf\ c_n = -\infty$.

Определение 7.2: Ако X е ограничено отгоре и $x_0 = \sup X$, то ще казваме, че x_0 горна точка на сгъстяване за редицата $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. Това ще бележим с $x_0 = \lim_{n\to\infty} \sup\ c_n$. Ако множеството X е неограничено отгоре, то $\lim_{n\to\infty} \sup\ c_n = +\infty$.

Твърдение 7.1: Нека $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена редица. Тогава редицата има минимална и максимална точка на сгъстяване (т.е. $\inf X \in X$ и $\sup X \in X$).

Доказателство:
От теоремата на Болцано-Вайерщрас (Всяка ограничена редица има поне една точка на сгъстяване.) следва, че X не е празното множество. Понеже редицата е ограничена, то и X е ограничено множество. Следователно по принципа за непрекъснатост следва, че съществуват $\sup X$ и $\inf X$. Означаваме с $U = \sup X$. Ще докажем, че U е най-голямата точка на сгъстяване на редицата (максималният елемент на множеството X). За целта ще докажем, че U е точка за сгъстяване за $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. Защо трябва да докажем, че $U = \sup X$ е точка за сгъстяване? Защото $\sup U$ по

дефиниция не е задължително да принадлежи на U и от там не е ясно дали U е точка на сгъстяване за редицата. Избираме $\varepsilon > 0$ произволно. По твърдение 2.1 от тема 2 следва, че съществува $x \in X$, такова че $x > U - \varepsilon$. Понеже $x \in X$ и U е супремумът на X, то тогава е в сила неравенството $U - \varepsilon < x < U + \varepsilon$. Нека да изберем ε_1 толкова малко, че $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subset (U - \varepsilon, U + \varepsilon)$. Тъй като $x \in X$, то тогава x е точка на сгъстяване за редицата и следователно в интервала $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1)$ има безброй много елементи на редицата. Следователно и в ε-околността на U, т.е. $(U - \varepsilon, U + \varepsilon)$, има безброй много елементи на редицата c_n. От тук получаваме, че U е точка на сгъстяване за c_n и следователно U е максималната точка на сгъстяване за редицата. Аналогично се доказва и другата част на твърдението, т.е. съществуването на минимална точка на сгъстяване. ■

Пример 7.1: Да разгледаме редицата $a_n = 2 + (-1)^n$ или записана в явен вид:

$$1, 3, 1, 3, \ldots$$

Надявам се, че виждате, че тази редица иа 2 точки на сгъстяване 1 и 3 следователно $\limsup = 3$, а $\liminf = 1$.

Пример 7.2: Да разгледаме редицата $a_n = \left(1 + \frac{n}{n+1}\right) \cdot \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$. Ако $n = 2k + 1$, то тогава получаваме последователно $\cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right] = 0$ и ${}_{2k+1} = 0$, т.е. подредицата от членовете с нечетни номера клони към 0.

Разглеждаме

$$a_{4k} = \left(1 + \frac{4k}{4k+1}\right) \cdot \cos 2k\pi = 1 + \frac{4k}{4k+1}.$$

Тази подредица е сходяща, защото е монотонно растяща $\left(\frac{4k}{4k+1} < \frac{4k+4}{4k+5}\right)$ и ограничена отгоре $(1 + \frac{4k}{4k+1} < 1 + 1 = 2)$. Правим граничен преход и получаваме $a_{4k} \to 1 + 1 = 2$.

Последно разглеждаме подредицата, получена като вземем само членовете с индекси $n = 4k + 2$. Аналогично получаваме $a_{4k+2} \to -2$. Това означава, че редицата има 3 точки на сгъстяване – -2,0,2. Така получихме, че $\limsup a_n = 2$, а $\liminf a_n = -2$.

Теорема 7.1 (НДУ на Коши) : Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща $\Leftrightarrow$ за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери ν такова, че от $m, n > \nu$ да следва $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Доказателство:

$\Rightarrow$) Нека редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и е нейната граница. То тогава ще докажем, че за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери ν такова, че $|a_n - a_m| < \varepsilon$ за $m, n > \nu$.

Интуитивно една редица е сходяща, ако всички членове на редицата от някакъв индекс нататък са „много близо“ до a. Тогава, ако вземем два члена (с номера по-големи от някакво място нататък), то те ще са много близо до a. Тогава би трябвало да са супер близо един до друг.

Преминаваме към доказателството. Фиксираме $\varepsilon > 0$. Понеже $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща, то за фиксирано $\varepsilon_0 = \varepsilon/2$ съществува $\nu_0 \in \mathbb{N}$ такова, че от $n > \nu_0$ да следва $|a_n - a| < \varepsilon_0$. Понеже $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ е сходяща, то за фиксирано $\varepsilon_0 = \varepsilon/2$ съществува естествено число ν_0, такова че при $m > \nu_0$ е изпълнено $|a_m - a| < \varepsilon_0$. Тогава при $m, n > \nu$ получаваме

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. редицата удовлетворява условието.

$\Leftarrow$) Нека сега е изпълнено, че за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери ν такова, че от $m, n > \nu$ да следва $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Ще докажем, че редицата $\{a_n\}$ е сходяща.

Интуитивно казано: всеки два члена (от някакъв индекс нататък) са супер близо един до друг, то тогава всеки от тези членове би трябвало да е много близо до някакво фиксирано число. Поради това би трябвало това фиксирано число да е границата на редицата.

Преминаваме към доказателството. Задаваме $\varepsilon = 1$, то тогава съществува естествено число ν такова, че $|a_n - a_m| < 1$ за $m, n > \nu$. Нека фиксираме $m = m_0$ и така получаваме

$$-1 < a_n - a_{m_o} < 1 \quad \forall n \geq \nu$$
$$-1 + a_{m_o} < a_n < 1 + a_{m_o} \quad \forall n \geq \nu.$$

Следователно редицата $\{a_n\}$ е ограничена, тъй като множествоото от първите ν члена (краен брой) е ограничено, а множеството от другите членове на редицата е ограничено от последното неравенство поради фиксираността на m_0. Следователно по теоремата на Болцано–Вайерщрас, съществува подредица a_{n_k}, която е сходяща. Нека означим нейната граница с a. Задаваме $\varepsilon_0 > 0$. Разписваме последователно

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_{\overline{k}}} + a_{n_{\overline{k}}} - a| \leq |a_n - a_{n_{\overline{k}}}| + |a_{n_{\overline{k}}} - a|,$$

където $n_{\overline{k}}$ е фиксиран индекс от подредицата. Избираме $\varepsilon_1 = \varepsilon_0/2$ следователно съществува ν_1 такова, че при $k > \nu_1$ е изпълнено $|a_{n_k} - a| < \varepsilon_1$. Избираме $\varepsilon = \varepsilon_0/2$ и следователно съществува ν такова, че при $n, m > \nu$ е изпълнено $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Тъй като членовете на редицата a_{n_k} са членове на редицата a_n, то тогава $|a_n - a_{n_k}| < \varepsilon$ при $n_k, n > \nu$. Тогава от предните разсъждения получаваме, че

$$|a_n - a| = \leq |a_n - a_{n_{\overline{k}}}| + |a_{n_{\overline{k}}} - a| < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0 \tag{1}$$

при фиксирано $\overline{k} > \nu_1$, фиксирано $n_{\overline{k}} > \nu_2$ и произволно $n > \nu_2$. Нека $\nu_0 = \max\{\nu_1, \nu_2\}$. Тогава получаваме, че неравенството (1) е изпълнено за всяко $n > \nu_0$, тъй като $n_{\overline{k}} \geq \overline{k} > \nu_1$ (виж предната тема) и $n_{\overline{k}} > \nu_2$. Следователно редицата $\{a_n\}$ е сходяща. ■

Пример 7.3: Ще докажем, че редицата

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

е разходяща. За целта ще използваме критерия на Коши (НДУ на Коши). За целта ще докажем, че не е изпълнено условието на Коши (за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери $\nu \in \mathbb{N}$ такова, че ако $m, n > \nu$, то $|a_n - a_m| < \varepsilon$). Това означава, че съществува ε_0 такова, че за всяко $\nu \in \mathbb{N}$ съществуват индекси $m, n > \nu$, за които $|a_n - a_m| \geq \varepsilon_0$. Да разгледаме индексите m и n, такива че $m = 2n$. Пресмятаме

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Полагаме $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Така получихме, че за всяко $\nu \in \mathbb{N}$ съществуват индекси m, n, за които е изпълнено

$$|a_{2n} - a_n| \geq \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

С това доказахме, че редицата е разходяща. ■

Твърдение 7.2: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща $\Longleftrightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена и има единствена точка на сгъстяване.

Доказателство:
$\Longrightarrow$) Тъй като $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща, то a_n е ограничена по свойство 4.3. Тъй като $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща, то a_n има единствена точка на сгъстяване.

$\Longleftarrow$) Нека a_n има единствена точка на сгъстяване. Означаваме тази точка с . Ще докажем, че $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Допускаме противното т.е. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ разходяща ограничена редица с единствена точка на сгъстяване a. Това означава, че съществува ε-околност на точката a, извън която има безброй много членове на редицата. Понеже редицата е ограничена, т.е. съществуват M и N такива, че $M \leq a_n \leq N$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Така получаваме

$$M < a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon < N \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Тогава в интервала $[M, a-\varepsilon]$ или в интервала $[a+\varepsilon, N]$ има безброй много членове на редицата. Без ограничение на общността ще допуснем, че в интервала $[M, a-\varepsilon]$ има безброй много членове на редицата $\{a_n\}$. Тогава можем да построим подредица $\{a_{n_k}\}$, чиито членове да принадлежат на интервала $[M, a-\varepsilon]$. Редицата $\{a_{n_k}\}$ е тогава ограничена и следователно има поне 1 точка на сгъстяване (теоремата на Болцано-Вайерщрас), която принадлежи на интервала $[M, a-\varepsilon]$. С което достигнахме до противоречие, тъй като получихме, че a_n има две различни точки на сгъстяване. $\blacksquare$

Пример 7.4: Обърнете внимание, че по-силното твърдение „Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща $\Longleftrightarrow$ има единствена точка на сгъстяване." **не е вярно**, т.е. условието за ограниченост на редицата е от съществено значение. За да установим това, ще разгледаме следния контрапример:

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ е четно} \\ n, & n \text{ е нечетно.} \end{cases}$$

Тази редица има единствена точка на сгъстяване 1 и не е ограничена. Също така е очевидно, че редицата е разходяща.