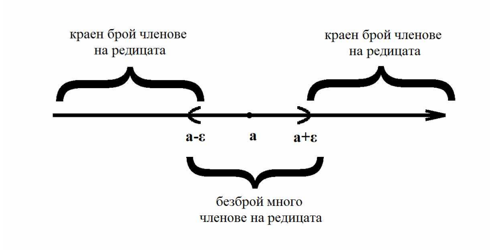
6.Точка на сгъстяване. Подредица. Теореми на Болцано-Вайерщрас и Кантор

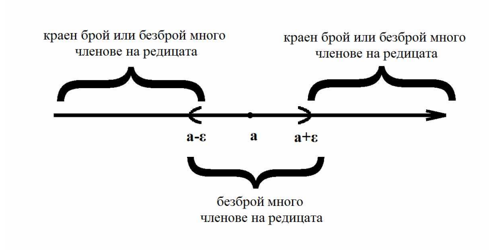
Определение 6.1: Казваме, че a е точка на сгъстяване за редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако във всяка околност на точката а има безброй много елементи на редицата.

Но каква тогава е разликата между точката на сгъстяване на редицата и границата на редицата? Да припомним определението за граница на редица:

Определение 6.2: Казваме, че a е граница на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако извън всяка околност на точката а има най-много краен брой елементи на редицата.

От двете определения е ясно, че разликата е много проста. Ако една точка е граница на редица, то тогава в общия случай във всяка епсилон околност на точката има безброй елементи, а извън нея само краен брой. Ако тя е точка на сгъстяване, то във всяка епсилон околност на точката има безброй много елементи на редицата, а извън нея може да има както безкраен, така и краен брой елементи. Виж картинките:





Пример 6.1: Редицата

$$0, 1, 0, 1, ...$$

има 2 точки на сгъстяване.

Твърдение 6.1: Ако редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща с граница a, то a е единствена точка на сгъстяване за редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказателство:
Да допуснем противното, т.е. че съществува и друга точка на сгъстяване b за редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Без да се ограничава общността на разглежданията можем да приемем, че $a > b$ (ще се получи аналогична сметка за $a < b$). Понеже $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват най-много краен брой членове a_n извън $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, а понеже b е точка на сгъстяване на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, то във всяка околност на точката b (т.е. в интервала $(b-\varepsilon_1, b+\varepsilon_1)$) има безброй много елементи на редицата. Избираме $\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{a-b}{2}$. Тогава съществуват само краен брой членове извън $(a - \frac{a-b}{2}; a + \frac{a-b}{2}) = (\frac{a+b}{2}, \frac{3a-b}{2})$. Но освен това трябва да имаме безкраен брой членове в интервала $(b-\varepsilon_1; b+\varepsilon_1)$ (т.е. в $(\frac{3b-a}{2}, \frac{a+b}{2})$). Така получихме, че $\frac{3b-a}{2} < b < \frac{a+b}{2} < a_n < \frac{3a-b}{2}$ и че извън интервала $(\frac{a+b}{2}, \frac{3a-b}{2})$ има само краен брой членове на редицата, което от своя страна значи че b не е точка на сгъстяване за редицата. Достигнахме до противоречие с допускането и с това твърдението е доказано. ■

А сега да видим какво наричаме подредица на редица.

Сега да започнем на интуитивно ниво. Подредица на една редица наричаме редицата, която ще се получи като зачеркнем определен брой членове от редицата. Важно е след тази операция в новополучената редица (подредицата) да останат безкраен брой членове. Надявам се, че е ясно, че ако зачеркнем краен брой членове от редицата, то в нея ще останат безкраен брой. Но дали е възможно да зачеркнем безкраен брой членове и достанат още безкраен брой?

Пример 6.2: Да разгледаме редицата с общ член $a_n = n$. Ако зачеркнем членовете на нечетните места, ще получим нейната подредица $a_n = 2n$. Освен това сме зачеркнали безброй много членове.

Сега да припомним определението за числова редица:

Определение 6.3: Числова редица е функция от вида:

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

където $\mathbb{N}$ е множеството на естествените числа и $\mathbb{R}$ е множеството на реалните числа. Тя се бележи обикновено с $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ или $\{a_n\}$.

Сега да преминем към формалното определение за подредица:

Определение 6.4: Нека е дадена редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$a_1, a_2, ...a_n, ...$$

и строго растяща редица от естествени числа $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$$

Тогава редицата $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$

$$a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_k}, ...$$

наричаме подредица на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Твърдение 6.2: Ако $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ е строго растящата редица от естествени числа, то $n_k \geq k$ за всяко $k \in \mathbb{N}$.

Доказателство:

Ще докажем твърдението по индукция:

1. $n_1 \geq 1$, тъй като 1 е най-малкото естествено число, а n_1 е естествено число.

2. Да допуснем, че твърдението е изпълнено за $k = m$, т.е. $n_m \geq m$.

3. Ще докажем, че твърдението е изпълнено за $k = m+1$, т.е. $n_{m+1} \geq m+1$. От индукционното предположение получаваме

   $$m < m + 1 \leq n_m + 1.$$

   Понеже редицата е строго растяща, то

   $$m < m + 1 \leq n_m + 1 < n_{m+1} + 1.$$

   Тъй като членовете на редицата са естествени числа следователно

   $$m < m + 1 \leq n_m + 1 \leq n_{m+1}.$$

   Тогава получаваме $n_{m+1} \geq m + 1$.

С това доказахме твърдението.

Пример 6.3: Да разгледаме редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ или

$$1, 2, 3, ..., n, ...$$

и да вземем редицата от естествени числа $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$ или

$$2, 4, ..., 2n, ...,$$

която е строго растяща ($2(n+1) > 2n$ за $n > 1$). Тогава подредицата, която търсим е $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ или

$$a_2, a_4, ..., a_{2n}, ...$$

или в случая

$$2, 4, ..., 2n, ...$$

Пример 6.4: Да разгледаме редицата на Фибоначи $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (рекурентно се задава $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$):

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...$$

и да вземем редицата от естествени числа $\{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$ или

$$1, 3, ..., 2n-1, ...,$$

която е строго растяща $(2(n+1) - 1 > 2n - 1$ за всяко $n)$. Тогава подредицата, която търсим е $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ или

$$a_1, a_3, ..., a_{2n-1}, ...$$

или в случая

$$1, 2, 5, 13, ...$$

Твърдение 6.3: Нека $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Тогава всяка подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и $a_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Доказателство:
Понеже $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, тогава от определението за сходимост на редица следва, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува ν такова, че от $n > \nu$ да следва $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Трябва да проверим, че подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е сходяща и клони към а. Взимаме първия индекс k_0, за който е изпълнено $k_0 > \nu$. Тогава от $n_k \geq k > k_0 > \nu$ (твърдение 2) следва $a_{n_k} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Следователно получихме, че $a_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$. ■

Твърдение 6.4: Нека a е точка на сгъстяване за редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогава съществува подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, клоняща към a. Обратно, ако имаме подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, която клони към a, то точката a е точка на сгъстяване за $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказателство:
$\Rightarrow$) Нека a е точка на сгъстяване за $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ще построим подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, която клони към a.

Разглеждаме околността $(a-1, a+1)$. Понеже a е точка на сгъстяване, в тази околност има безброй много елементи от $\{a_n\}$. Избираме произволен член от околността и го наричаме a_{n_1}. Взимаме околоността $(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2})$. В нея има безброй много елементи от $\{a_n\}$, а членовете с индекси по-малки или равни на n_1 са краен брой. Избираме произволен член от околността с номер по-голям от n_1 и го наричаме a_{n_2} и т.н.. За член $a_{n_k} \in \left(a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k}\right)$ получаваме неравенството:

$$a-\frac{1}{k} < a_{n_k} < a+\frac{1}{k}$$

Правим граничен преход в него и получаваме.

$$a = \lim_{k\to\infty}\left(a-\frac{1}{k}\right) \le \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \le \lim_{k\to\infty}\left(a+\frac{1}{k}\right) = a.$$

От полученото неравенство по лемата за двамата полицаи следва, че $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.
$\Leftarrow$) Нека $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е подредица на редицата$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, която клони към a. Трябва да докажем, че точката a е точка на сгъстяване за редицата. Разглеждаме произволна околност $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Понеже $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ клони към a, то всички с изключение на най-много краен брой членове на $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ са в тази околност. Но всички членове на $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ са членове и на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. безброй членове на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ са в произволна епсилон околност на a. Така получихме, че точката a е точка на сгъстяване за $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. ■

Теорема 6.1 (на Болцано-Вайерщрас) : От всяка ограничена редица може да се избере сходяща подредица. Или еквивалентно всяка ограничена редица има поне 1 точка на сгъстяване. Теоремата на Вайерщрас е известна още под името „принцип за компактността“.

Доказателство:
Нека $\{c_n\}$ е ограничена редица следователно за всяко n е изпълнено $c_n \in [a_1, b_1]$ за някакви $a_1 \leq b_1$. Ясно е, че в интервала $[a_1, b_1]$ има безброй много членове на редицата, тъй като всички членове са в този интервал, а редицата има безкрайно много членове. Ще разделим интервала на две равни части. В поне едната от двете половини има безброй много членове на редицата. Защо? Да допуснем, че и в двете половини има краен брой членове на редицата. Тогава и в целия интервал ще има краен брой членове, защото краен брой+краен брой = краен брой. Противоречие. Следователно поне в едната половина ще има безкраен брой членове на редицата. Нека да означим левия и десния край на тази половина съответно с a_2 и b_2.[1] Отново правим същото: взимаме интервала $[a_2, b_2]$ и го разделяме на две равни части. В поне едната от тези части трябва да има безброй много елементи на редицата. Избираме половината с безкраен брой членове или, ако и двете – са такива, избираме едната половина без значение коя. Отново наименуваме краищата на интервала съответно a_3 и b_3 и така нататък.
Като разделяме $[a_1, b_1]$ много пъти на по две равни части, достигаме до парченца, които са все по-малки и по-малки. Накрая ще достигнем до парченце, което е безкрайно малко и има безброй много елементи на редицата. Последното на интуитивно ниво означава, че ще стигнем до точка на сгъстяване.
А сега да продължим със строгото доказателство. Достигаме до интервал $[a_n, b_n]$, в който има безброй много членове на редицата $\{c_n\}$. От въведените означения би трябвало да е ясно, че:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_n < b_1$$

Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно растяща и ограничена отгоре следователно е сходяща. Означаваме границата и с A.

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq ... \geq b_n > a_1$$

Редицата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно намаляваща и ограничена отдолу следователно е сходяща. Означаваме границата и с B.
Следващата стъпка е да докажем, че $A = B$. Понеже $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$

[1] Няма значение коя от двете половини ще се окаже с безброй много елементи. Ако и двете са такива, избираме коя да е.

са сходящи, то редицата $a_n - b_n$ също е сходяща. То тогава

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = A - B.$$

Колко е разстоянието между a_n и b_n? Понеже това са точки, получени при разполовяване на интервала $[a_1, b_1]$ $n-1$ пъти, то тогава получаваме

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = 0.$$

Така получихме, че $B - A = 0$, т.е. $A = B$. Тогава при $n \to \infty$ интервалът $[a_n, b_n]$ клони към точка (интервала $[A, A]$). Нека означим тази точка с C. Ще докажем, че C е точка за сгъстяване за $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. За тази цел трябва да проверим дали във всяка околност на C има безброй много членове на редицата c_n. Фиксираме $\varepsilon > 0$. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = C = A$, то всички членове на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, за които е изпълнено $n > \nu_1$, попадат в ε-околността $(C - \varepsilon, C + \varepsilon)$. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = C = B$, то всички членове на редица с индекси $n > \nu_2$ попадат е околността $a_n \in (C - \varepsilon, C + \varepsilon)$. Следователно за $n > \max\{\nu_1, \nu_2\}$ е изпълнено, че $a_n, b_n \in (C-\varepsilon, C+\varepsilon)$. За всяко $n > \max\{\nu_1, \nu_2\}$ получаваме $[a_n, b_n] \subset (C-\varepsilon, C+\varepsilon)$. Тъй като в интервала $[a_n, b_n]$ има безброй много членове на редицата $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ (защото по този начин сме построили интервала $[a_n, b_n]$), то и в $(C-\varepsilon, C+\varepsilon)$ има безброй много членове на редицата. Следователно във всяка епсилон околност на точката C имаме безброй много членове на редицата. С това доказахме, че C е точка на сгъстяване на редицата, т.е. всяка ограничена редица има поне 1 точка на сгъстяване. Но от предното твърдение, тъй като a е точка на сгъстяване за редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, то тогава съществува подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, клоняща към a. ■

Теорема 6.2 (на Кантор) : Нека $\{[a_n, b_n]\}$ е редица от интервали, които

1. са затворени;
2. $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$ $\forall k \in \mathbb{N}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

Тогава съществува единствена точка C, принадлежаща на всички интервали $[a_n, b_n]$.

Доказателство:

На интуативно ниво ние разглеждаме редица от затворени интервали вложени един в друг, чиято дължина клони към 0. Последното означава, че двата края на всеки следващ интервал ще се приближават все повече и повече един към друг. При безброй вложени интервали двата края на „най-вътрешния интервал“ ще съвпаднат и той ще се изроди в точка. Остана да докажем теоремата формално. Интервалите са вложени един в друг, т.е.

$$... \subset [a_n, b_n] \subset .... \subset [a_3, b_3] \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1].$$

Поради това са в сила неравенствата

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_n < b_n \leq ... \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1.$$

Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно растяща и ограничена отгоре следователно е сходяща. Означаваме границата и с A. Редицата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно намаляваща и ограничена отдолу следователно е сходяща. Означаваме границата и с B. От 3) получаваме, че $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B = 0$, т.е. $A = B =: C$. Понеже C е границата на монотонно растящата редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, то $a_n \leq C$ (твърдение 5.3 в тема 5). Аналогично понеже C е границата на монотонно намаляващата редица $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, то $b_n \geq C$ (твърдение 5.4 в тема 5). Следователно неравенството $a_n \leq C \leq b_n$ е в сила. Така доказахме, че има поне една точка C във всеки интервал $[a_n, b_n]$. Остава да докажем, че тази точка е единствена. Да допуснем противното, т.е. че съществуват две различни точки C и C', които принадлежат на всички вложени интервали. От $C \in [a_n, b_n]$ получаваме

$$a_n \leq C \leq b_n. \tag{1}$$

От $C' \in [a_n, b_n]$ следва

$$a_n \leq C' \leq b_n \Rightarrow -b_n \leq -C' \leq -a_n. \tag{2}$$

Събирайки неравенства (1) и (2), получаваме

$$a_n - b_n \leq C - C' \leq b_n - a_n \Leftrightarrow 0 \leq |C - C'| \leq b_n - a_n.$$

Правим граничен преход в последното получено неравенство:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |C - C'| \leq \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$$

и получаваме, че $|C - C'| = \lim\limits_{n\to\infty} |C - C'| = 0$ по лемата за двамата полицаи. Следователно $C = C'$, което е в противоречие с допускането, че C и C' са две различни точки. С това теоремата е доказана. ■