5.Монотонни редици. Неперово число

Определение 5.1: Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно растяща, ако за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено $a_n \leq a_{n+1}$.

Определение 5.2: Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е строго монотонно растяща, ако за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено $a_n < a_{n+1}$.

Пример 5.1: Да разгледаме редицата $a_n = a$. Тъй като $a_{n+1} - a_n = a - a = 0 \geq 0$, то редицата е монотонно растяща, но не и строго монотонно растяща.

Пример 5.2: Да разгледаме редицата $a_n = n$. Тъй като $a_{n+1} - a_n = n + 1 - n = 1 > 0$, то редицата е строго монотонно растяща.

Определение 5.3: Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно намаляваща, ако за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено $a_n \geq a_{n+1}$.

Определение 5.4: Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е строго монотонно намаляваща, ако за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено $a_n > a_{n+1}$.

Пример 5.3: Да разгледаме редицата $a_n = a$. Тъй като $a_{n+1} - a_n = a - a = 0 \leq 0$, то редицата е монотонно намаляваща. Единствените редици, които са едновременно монотонно растящи и монотонно намаляващи, са редиците от вида $a_n = a$.

Пример 5.4: Да разгледаме редицата $a_n = -n^2$. Тъй като:

$$a_{n+1} - a_n = -(n+1)^2 - (-n^2) = -n^2 - 2n - 1 + n^2 = -2n - 1$$

то редицата е строго намаляваща $(n > 0)$.

Пример 5.5: Да разгледаме редицата $a_n = \frac{1}{n}$. Тъй като:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n+1}$$

За да не останете с впечатлението, че всички редици са монотонно растящи или монотонно намаляващи ще дам и примери за редици, които не са нито монотонно растящи, нито монотонно намаляващи:

Пример 5.6: Редицата $a_n = (-1)^n$ не е нито растяща, нито намаляваща.

Твърдение 5.1: Всяка ограничена отгоре монотонно растяща редица е сходяща.

Доказателство:
Нека $\{a_n\}$ е ограничена отгоре монотонно растяща редица и нека l е нейната точна горна граница. Да изберем произволно положително число ε. Тъй като l е точна горна граница, то от определението за точна горна граница следва, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува някакъв член на редицата a_ν, такъв че $l \geq a_\nu > l - \varepsilon$. Но понеже редицата е монотонно растяща, то при $n > \nu$ е изпълнено, че $l + \varepsilon > l \geq a_n \geq a_\nu > l - \varepsilon$, т.е. при $n > \nu$ е в сила $l + \varepsilon > a_n > l - \varepsilon$, следователно редицата е сходяща към l. ■

Твърдение 5.2: Всяка ограничена отдолу монотонно намаляваща редица е сходяща.

Доказателство:
Доказателството е аналогично на това на предното твърдение.

Пример 5.7: За редиците в предните примери можем да кажем дали са сходящи, но чрез ползване на ε-дефиницията, но е доста по-удобно в някои случаи да ползваме горните твърдения.

Твърдение 5.3: Нека $\{a_n\}$ е монотонно растяща редица и нека $a_n \to a$. Тогава $a_n \leq a$.

Доказателство:
Да допуснем противното т.е. $\{a_n\}$ е монотонно растяща редица и $a_n \to a$, но съществува ν, такова че $a_\nu > a$. Колкото и да е близо a_ν до a, винаги можем да изберем $\varepsilon > 0$, такова че $a_\nu \geq a + \varepsilon > a$. Понеже редицата е монотонно растяща, то тогава за всяко $n > \nu$ е изпълнено $a_n \geq a_\nu \geq a + \varepsilon > a$, т.е. имаме само краен брой елементи в ε-околност на a т.е. достигнахме до противоречие. С това доказхме, че $a_n \leq a$. ■

Аналогично се доказва

Твърдение 5.4: Нека $\{a_n\}$ е монотонно намаляваща редица и нека $a_n \to a$. Тогава $a_n \geq a$.

Да разгледаме редицата с общ член $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Ще докажем, че редицата е сходяща, като докажем, че тя е монотонно растяща и ограничена отгоре.

1. Първо ще докажем, че редицата е растяща. За целта ще пресметнем a_n и a_{n+1}

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k}.$$

   Ако не ви е ясно нещо от предния ред, е добре да погледнете темата за Нютонов бином. Означаваме $c_k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k}$. Сега ще преобразуваме поотделно c_0, c_1, c_2,...c_n:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{n!}{0!\cdot(n-0)!}\cdot\frac{1}{n^0} = \frac{n!}{1\cdot n!}\cdot\frac{1}{1} = 1\\
c_1 &= \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!}\cdot\frac{1}{n^1} = \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} = 1\\
c_2 &= \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{2!n} = \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\\
&\dots\\
c_k &= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} =\\
&= \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\
&\dots\\
c_n &= \frac{n!}{n!\cdot(n-n)!}\cdot\frac{1}{n^n} = \frac{n!}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} = \frac{1}{n!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n} =\\
&= \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

И така получаваме:

$$
a_n = 1+1+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+
$$
$$
+\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) = 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)
$$

За да не правим всички тези сметки и за a_{n+1}, просто в последното равенство заместваме n с n+1 и получаваме:

$$
a_{n+1} = 2+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)
$$

Да напомня, че искаме да докажем, че редицата $\{a_n\}$ е строго монотонно растяща, т.е. $a_n < a_{n+1}$. За целта ще покажем, че $a_{n+1} - a_n >$

0:

$$a_{n+1} - a_n = 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) -$$

$$- \left(2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) ... \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

Нека $0 < s < n$ следователно:

$$n < n+1$$

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

$$1 > \frac{s}{n} > \frac{s}{n+1} > 0$$

$$-1 < -\frac{s}{n} < -\frac{s}{n+1} < 0$$

$$0 = 1 - (-1) < 1 - \frac{s}{n} < 1 - \frac{s}{n+1} < 1$$

Да вземем $s = 1, 2, 3, ..., k-1$:

$$0 < 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

$$0 < 1 - \frac{2}{n} < 1 - \frac{2}{n+1} < 1$$

$$\ldots$$

$$0 < 1 - \frac{k-1}{n} < 1 - \frac{k-1}{n+1} < 1$$

Да умножим всички получени неравенства:

$$0 < \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) < 1 \qquad (\star)$$

От предното неравенството следват две неравенства:

(а) Ако заместим $k = n+1$, получаваме, че:

$$0 < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

(б) Ако прехвърлим лявата страна на неравенството отдясно, получаваме, че:

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) > 0$$

Да се завърнем към целта:

$$a_{n+1} - a_n =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\frac{1}{k!}}_{>0} \cdot \underbrace{\left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right]}_{>0 \text{ от (б)}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}}_{>0} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)}_{>0 \text{ от (а)}} > 0$$

т.е. редицата е монотонно растяща.

2. Ще докажем, че редицата е ограничена отгоре. Първо ще използваме неравенството $(\star)$:

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots + \frac{1}{n!} \qquad \star\star$$

Но ние знаем, че:

$$k! = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1 > \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots}_{\text{n-1 пъти}} \cdot 1 = 2^{n-1}$$

От предното неравенство стигаме до извода:

$$\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

И се връщаме към преработката на ($\star\star$):

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{k!} + ... + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{k-1}} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} =$$
$$= 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{k-1}} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}}_{\text{сумата на първите n члена на геометричната прогресия}} = 1 + 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} <$$
$$< 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3$$

Така получихме, че $a_n < 3$.

Тъй като доказахме, че редицата $\{a_n\}$ е монотонно растяща и ограничена, то тя е сходяща по твърдение 1. Границата на редицата с общ член $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ се нарича Неперова число и се бележи с числото e. Понеже редицата е монотонно растяща, то $2 = a_1 < a_n < 3$. Правим граничен преход в неравенството и получаваме, че $2 < e < 3$. Всъщност може да се докаже, че e е ирационално число с първи няколко знака след десетичната запетая:

$$e = 2,718281828459. \quad \blacksquare$$

Теорема 5.1 (на Щолц) : Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ са две числови редици, като $b_n \to \infty$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е строго растяща. Тогава ако $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l$, то съществува $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Доказателство:

1. Ще докажем, че $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_k}{b_{n+1}-b_k} = l$, където k е фиксирано число. Понеже k е фиксирано число, то и a_k и b_k са фиксирани числа, т.е. не зависят от n. Да фиксираме $\varepsilon > 0$. Понеже редицата $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ е сходяща и клони към l, то съществува естествено число ν, такова че ако $n > \nu$ е в сила

$$\left| \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - l \right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Сега да преработим малко (1):

$$\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}-l\right|<\varepsilon$$
$$-\varepsilon<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}-l<\varepsilon$$
$$l-\varepsilon<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<l+\varepsilon$$

Сега можем да умножим неравенството по $(b_{n+1}-b_n)$, тъй като $\{b_n\}$ е строго растяща по условие. Тогава получаваме:

$$(l-\varepsilon)(b_{n+1}-b_n)<a_{n+1}-a_n<(l+\varepsilon)(b_{n+1}-b_n) \qquad (2)$$

Понеже неравенство (2) е изпълнено при $n>\nu$, тогава то е в сила и за $n\geq\nu+1$. Нека $k:=\nu+1$. Неравенството (2) е в сила за $n\geq k$, значи то е изпълнено за k, $k+1$,...,n:

$$\begin{array}{ccccc}
(l-\varepsilon)(b_{k+1}-b_k) & < & a_{k+1}-a_k & < & (l+\varepsilon)(b_{k+1}-b_k)\\
(l-\varepsilon)(b_{k+2}-b_{k+1}) & < & a_{k+2}-a_{k+1} & < & (l+\varepsilon)(b_{k+2}-b_{k+1})\\
 & & \cdots & & \\
(l-\varepsilon)(b_n-b_{n-1}) & < & a_n-a_{n-1} & < & (l+\varepsilon)(b_n-b_{n-1})
\end{array}$$

Сега събираме всички неравенства:

$$(l-\varepsilon)(b_n-b_k)<a_n-a_k<(l+\varepsilon)(b_n-b_k)$$

Сега делим на (b_n-b_k):

$$l-\varepsilon<\frac{a_n-a_k}{b_n-b_k}<l+\varepsilon \qquad (2)$$

И така доказахме, че $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_k}{b_n-b_k}=l$.

2. Ще докажем, че $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$. За целта ще направим следните преобразувания:

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_n-a_k+a_k}{b_n}=\frac{a_n-a_k}{b_n}+\frac{a_k}{b_n}=\frac{(a_n-a_k)(b_n-b_k)}{b_n(b_n-b_k)}+\frac{a_k}{b_n}=$$
$$=\frac{(a_n-a_k)b_n}{b_n(b_n-b_k)}-\frac{(a_n-a_k)b_k}{b_n(b_n-b_k)}+\frac{a_k}{b_n}=\frac{a_n-a_k}{b_n-b_k}-\frac{(a_n-a_k)b_k}{b_n(b_n-b_k)}+\frac{a_k}{b_n}=$$
$$=\frac{a_n-a_k}{b_n-b_k}-\frac{b_k}{b_n}\cdot\frac{a_n-a_k}{b_n-b_k}+\frac{a_k}{b_n}.$$

Правим граничен преход в равенството и получаваме:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_k}{b_n-b_k}-\lim_{n\to\infty}\frac{b_k}{b_n}\cdot\frac{a_n-a_k}{b_n-b_k}+\lim_{n\to\infty}\frac{a_k}{b_n}=l-$$
$$-b_k\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_k}{b_n-b_k}+a_k\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=l-b_k\cdot 0\cdot l+a_k\cdot 0=l$$

Последното се получи тъй като a_k и b_k и са фиксирани, а l е реално число. ■

Следствие 5.1(на Коши): Нека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$. Тогава $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=a$.

Доказателство:
Да разгледаме редиците $c_n=a_1+a_2+...+a_n$ и $b_n=n$. Можем да пресметнем:

$$\frac{c_{n+1}-c_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{a_1+a_2+...+a_{n+1}-(a_1+a_2+...+a_n)}{n+1-n}=\frac{a_{n+1}}{1}=a_{n+1}\to a$$

По теоремата на Щолц получаваме, че е изпълнено $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n}=a$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=a$. ■

Следствие 5.2: Нека $a_n>0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$. Тогава $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}=a$.

Доказателство:

1. $a\neq 0$ Да разгледаме редицата $b_n=\frac{1}{a_n}$. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a}=b$. Тогава можем да приложим следствие 1 за b_n и получаваме:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_1+b_2+...+b_n}{n}=b$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}{n}=\frac{1}{a}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}=a$$

2. $a = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} = 0 = a \quad \blacksquare$$

Следствие 5.3: Нека $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} = a$.

Доказателство:
Понеже $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то по следствие 1 и следствие 2 получаваме:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = a, \ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} = a$$

Освен това тъй като е в сила неравенството между средно аритметично, средно геометрично и средно хармонично, т.е.

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n},$$

то по лемата за двамата полицаи получаваме $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} = a$. $\blacksquare$

Следствие 5.4: Нека $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$. Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

Доказателство:
Нека да разгледаме редицата $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ и $b_1 = a_1$. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, то по предното следствие получаваме:

$$a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \ldots b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \ldots \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}. \quad \blacksquare$$