4.Граници на редици. Аритметични действия със сходящи редици

Какво е числова редица? Нещо просто – това са числа, наредени в редица по някакво правило. По-долу са представени няколко примера за числови редици:

Пример 4.1: 76, 2, 3

Пример 4.2: 2, 76, 3

Пример 4.3: 1, 2, 3, ...

Пример 4.4: 1, 4, 9, ...

Пример 4.5: 2, 4, 6, ...

Пример 4.6: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots.$

Числовите редици биват крайни (примери 1, 2) и безкрайни (примери 3, 4, 5, 6) в зависимост от броя на елементите им. Диференциалното и интегралното смятане разглежда само безкрайни числови редици. **Поради това от тук нататък като говоря за „числови редици“, ще имам предвид „безкрайни числови редици“.** Определението за числова редица изглежда така:

Определение 4.1: Числова редица е функция, която на всяко естествено число съпоставя реално число, т.е.

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$[1]

Забележка 1: Всъщност аргументът на функцията представлява поредния номер на елемента в редицата.

Забележка 2: Обикновено числовите редици се означават с $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Забележка 3: Ако функцията a задава числова редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, функционалните стойности $a(x)$ се наричат членове на редицата.

$a(1)$ – първият член на редицата (бележи се обикновено и с a_1);

$a(2)$ – вторият член на редицата (бележи се обикновено и с a_2);

....

$a(n)$ – n-тият член на редицата или още общ член на редицата (бележи се обикновено и с a_n)

....

Членовете на редицата в **пример 4.3** се задават по следния начин:

$$a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 3, ..., a_k = k, ...,$$

а тези – в пример **пример 4.4** имаме

$$a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 6, ..., a_k = k^2, ...$$

Забележка 4: Наредбата на елементите в една числова редица е от съществено значение, поради това **пример 4.1** и **пример 4.2** са две различни числови редици.

Начини на задаване на числови редици Една редица може да бъде зададена чрез

1. изброяване на първите няколко члена на редицата (**пример 4.1**–**пример 4.4**);
2. задаване на формула за общия член (това е формула, с която се задават всички членове на една редица). В **пример 4.3** формулата е $a_n = n$, **пример 4.5** – $a_n = 2n$. Това са формулите, които

[1] Припомням, че $\mathbb{N}$ е множеството на естествените числа, а $\mathbb{R}$ е множеството на реалните числа

са най-близко до ума. Но съществуват и други формули, с които могат да се получат първите няколко члена на една редица. Примерно първите 3 члена на **пример 4.3** могат да се получат и чрез формулата $a_n = n + (n-1)(n-2)(n-3)$. Последното идва да ни покаже, че е по-добре да използваме формула за общия член или рекурентни връзки между членовете на редица.

3. чрез рекурентна връзка между членовете. Обикновено се задава първия член (или първите няколко члена на редицата) и формула, която изразява всеки следващ член на редицата чрез предходните (един или няколко). Например:

   Пример 4.7: редицата на Фибоначи се задава обикновено по следния начин:

   $$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}, b_1 = 1, b_2 = 1.$$

   Така можем да пресметнем следващите няколко члена по следния начин:

   $$b_3 = b_1 + b_2 = 1 + 1 = 2,\ b_4 = b_2 + b_3 = 1 + 2 = 3$$

   Чрез изброяване на първите няколко члена редицата може да бъде записана по следния начин:

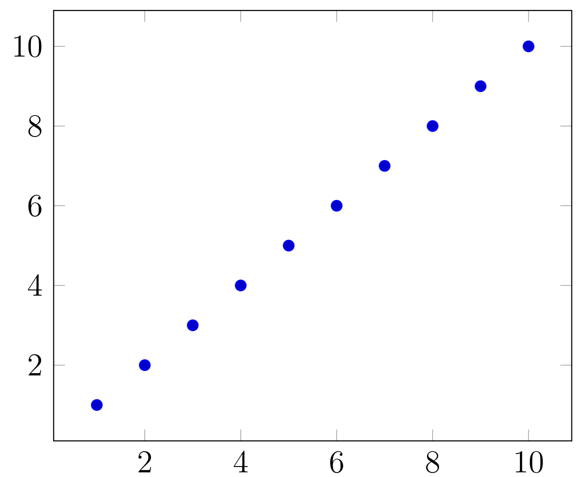
   $$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13....$$

4. чрез неявна дефиниция

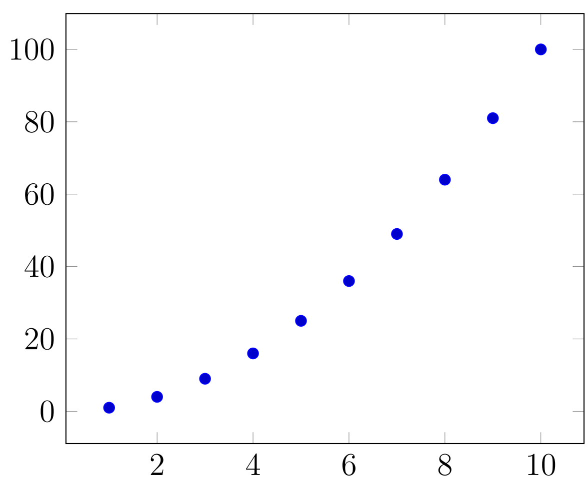
   Пример 4.8: c_n= n-тата цифра в десетичния запис на π

Изобразяване на редици Тъй като редиците са функции, то от тема 3 трябва да е ясно, че тогава можем да начертаем тяхната графика.

Например графиката на редицата $a_n = n$ (**пример 4.3**) е



Графиката на редицата $a_n = n$ (**пример 4.4**) е

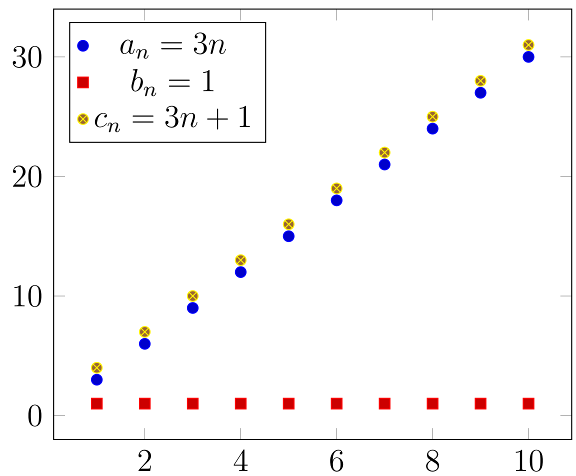


Действия с редици Ако са дадени две редици $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, то

1. сборът на двете редици е редицата $c_n = a_n + b_n$;
2. разликата на двете редици е редицата $c_n = a_n - b_n$;
3. произведението на двете редици е редицата: $c_n = a_n \cdot b_n$;
4. частното на двете редици (при положение, че $b_n \neq 0$ за всяко $n \in N$) е редицата $c_n = \frac{a_n}{b_n}$.

Пример 4.9: Да разгледаме редиците $a_n = 3n$ и $b_n = 1$. Тогава ще пресметнем и изобразим техния сбор c_n, разлика c'_n, произведение d_n и частно d'_n. Общия член на редицата c_n се пресмята като $c_n = 3n + 1$, а първите три члена на редицата са пресметнати по-долу

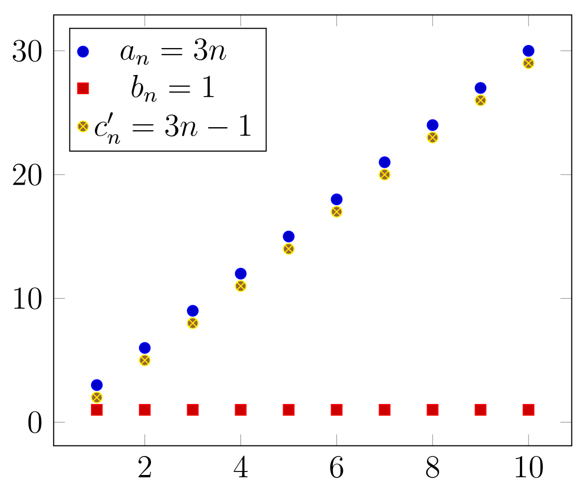
$$c_1 = a_1 + b_1 = 3 + 1 = 4$$
$$c_2 = a_2 + b_2 = 6 + 1 = 7$$
$$c_3 = a_3 + b_3 = 9 + 1 = 10$$



Разликата на тези 2 редици (т.е. $a_n - b_n$) е редицата

$$2, 5, 8, ..., 3n - 1, ...,$$

чиято графика изглежда по следния начин:



Аналогично произведението и частното на двете редици се пресмята по формулата $d_n = d'_n = 3n = a_n$.

Определение 4.2: Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена отгоре, ако членовете на редицата образуват множество, което е ограничено отгоре.

Понятието „ограничена отгоре редица“ може да се дефинира и директно (без използването на понятието „ограничено отгоре множеството“)

Определение 4.3: Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена отгоре, ако съществува число $M \in \mathbb{R}$, такова че за всяко $n \in \mathbb{N}$ е в сила $a_n \leq M$.

Определение 4.4: Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена отдолу, ако съществува число $M \in \mathbb{R}$, такова че за всяко $n \in \mathbb{N}$ е в сила $a_n \geq M$.

Определение 4.5: Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, ако е ограничена отгоре и ограничена отдолу.

Определение 4.6: Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е неограничена, ако не е ограничена отдолу или не е ограничена отгоре.

Пример 4.10: Редицата в **пример 4.5** е ограничена отдолу от 2 (очевидно всеки член на редицата $a_n = 2n \geq 2$, тъй като $n \geq 1$) и неограничена отгоре. Да допуснем, че редицата е ограничена отгоре. Тогава съществува число M, такова че $M \geq 2n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Да разгледаме числото $2\ulcorner M \urcorner$ ($\ulcorner M \urcorner$ означава най-малкото цяло число, надминаващо M, примерно $\ulcorner 1.111 \urcorner = 2$, $\ulcorner 0.0007 \urcorner = 1$, $\ulcorner 0.998 \urcorner = 1$). Понеже $2\ulcorner M \urcorner$ е член от редицата $\{a_n\}$, който е по-голям от M , то достигнахме до противоречие. Следователно доказахме, че редицата е неограничена отгоре.

Пример 4.11: Редицата $a_n = -n^2$ е ограничена отгоре от 0 и неограничена отдолу.

Пример 4.12: Редицата в **пример 4.6** е ограничена отдолу от 0 и ограничена отгоре от 1 (докажете го).

Пример 4.13: Редицата $a_n = (-1)^n n$ е неограничена отгоре и отдолу.

Ако редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена чрез общия си член (примерно $a_n = \frac{1}{n}$), можем да пресметнем елементарно произволен член на редицата:

$$a_1 = 1, a_{10} = 0.1, a_{100} = 0.01, a_{1000} = 0.001, a_{10000} = 0.0001, a_{100000} = 0.00001.$$

Добре, а какво става в безкрайността? Можем ли да сметнем „безкрайният член“ a_∞ (дебело подчертавам, че този запис не е валиден и се използва в случая само за онагледяване на примера)? За да сметнем какво се случва в безкрайността, редицата трябва все повече и повече да се доближава до конкретно число. В разгледания пример членовете се доближават все повече и повече до нула (ако не сте убедени все още, може да сметнете още от членовете на редицата примерно $a_{1000000}$, $a_{10000000}$, $a_{10000000000}$ и т.н.). На интуитивно ниво би трябвало да е станало ясно, че „безкрайният член“ на редицата е 0. Сега да въведем строго понятието „безкраен член на редица“, което на езика на математиката се нарича граница на редица:

Определение 4.7: Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува индекс на член от редицата ν, зависещ от ε, такъв че от $n > \nu$ да следва $|a_n - a| < \varepsilon$. Числото a се нарича граница на редица и съществува само ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща. Границата на редицата се бележи по следния начин $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ (чете се „границата на редицата a_n при n клонящо към безкрайност е a“).

По-кратко определението ще записваме по следния начин[2]:

$$\begin{aligned} & \forall\varepsilon > 0\ \exists\nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \\ \iff \quad & \forall\varepsilon > 0\ \exists\nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \Rightarrow a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon). \end{aligned}$$

Нека да дефинираме понятието ε-околност

Определение 4.8: ε-околност на числото a наричаме интервал от вида $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Може да се докаже, че опр. за граница на редица е еквивалентно на

[2]Символът $\forall$ се чете „за всяко“, символът $\exists$ - съществува, двоеточие - такова че, а символът$\Rightarrow$ – следва.

Определение 4.9: Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща, ако съществува реално число a такова, че извън всяка ε-околност на a има най-много краен брой членове на редицата. Числото a се нарича граница на редицата.

Пример 4.14: Нека да докажем с определението за сходимост, че границата на редицата $a_n = \frac{1}{n}$ е 0. Т.е. трябва да докажем, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\nu \in \mathbb{N}$, такова че при $n > \nu$ е изпълнено

$$|a_n - a| = |\frac{1}{n} - 0| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \varepsilon. \tag{1}$$

Да фиксираме $\varepsilon > 0$, тогава трябва да намерим ν (в зависимост от ε), за да докажем неговото съществуване.

Понеже $n > \nu$, то е изпълнено $\frac{1}{n} < \frac{1}{\nu}$. С цел да е изпълнено неравенството (1), избираме ν да удовлетворява $\varepsilon > \frac{1}{\nu}$. Най-малкото ν, което изпълнява това неравенство, е $\nu = \ulcorner\frac{1}{\varepsilon}\urcorner$ (припомням, че $\nu \in \mathbb{N}$). Така доказахме, че съществува ν, което да изпълнява определението за сходимост, т.е. за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\nu = \frac{1}{\varepsilon}$ такова, че от $n > \nu$ да следва:

$$|a_n - a| = |\frac{1}{n} - 0| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Определение 4.10: Ако редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не е сходяща, то тя се нарича разходяща.

Пример 4.15: Да разгледаме редицата

$$1, -1, 1, -1, 1, -1...$$

Тази редица не е сходяща. Защо? На интуитивно ниво не знаем дали в безкрайност ще отидем в 1 или в -1. Сега доказателството. Да допуснем противното, т.е. редицата е сходяща и нека да означим границата ѝ с a. Тогава по определението имаме за всяко $\varepsilon > 0$ съществува число ν (зависещо от ε) такова, че от $n > \nu$ да следва $|a_n - a| < \varepsilon$. Нека да изберем $\varepsilon > 0$. Тогава получаваме:

$$|1 - a| < \varepsilon, \text{ ако } n = 2k + 1,$$
$$|-1 - a| < \varepsilon, \text{ ако } n = 2k.$$

След това разкриваме модулите:

$$-1-\varepsilon < -a < -1+\varepsilon, \text{ ако } n = 2k+1,$$
$$1-\varepsilon < -a < 1+\varepsilon, \text{ ако } n = 2k.$$

Последно умножаваме по -1 и получаваме:

$$1+\varepsilon > a > 1-\varepsilon, \text{ ако } n = 2k+1,$$
$$-1+\varepsilon > a > -1-\varepsilon, \text{ ако } n = 2k.$$

Остава да изберем ε такова, че горните две неравенства за a да си противоречат (все пак искаме да достигнем до противоречие). Един подходящ избор за ε представлява $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (всъщност всяко $\varepsilon \in (0,1)$) ще доведе до противоречие). Така получихме, че $a < -\frac{1}{2}$ и едновременно $a > \frac{1}{2}$, откъдето достигнахме до противоречие, следователно редицата не е сходяща.

Твърдение 4.1: Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, където $a_n = a$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, има граница a.

Доказателство:
Доказателството следва непосредствено от определението. Трябва да докажем следното: за всяко $\varepsilon > 0$ съществува число $\nu \in \mathbb{N}$, зависещо евентуално от ε такова, че от $n > \nu$ да следва

$$|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon.$$

Последното неравенство е винаги изпълнено и следователно определението е в сила при произволен избор на ν. ■

Свойства на сходящите редици:

1. Ако към една редица прибавим или премахнем краен брой елементи, то това не влияе на нейната сходимост.

   Доказателство:
   Ще използваме второто определение за сходимост, а именно – „Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща, ако съществува число a, такова че извън всяка ε-околност на a има най-много краен брой членове

на редицата.“. Ако към разглежданата сходяща редица прибавим краен брой елементи, то дори всички те да са извън произволната ε-околност на a, извън нея все пак ще има най-много краен брой елементи (краен брой + краен брой = краен брой). Аналогично и при премахването на краен брой елементи. ■

2. Нека $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Нека a_n и b_n са сходящи и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$. То тогава е изпълнено $a \leq b$.

Доказателство:

Да допуснем противното, т.е. $b < a$. От една страна a_n е сходяща и има граница a, т.е. за всяко $\varepsilon > 0$ съществува индекс ν_1 такъв, че от $n > \nu_1$ да следва $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$. От друга страна b_n е сходяща и има граница b, т.е. за всяко $\varepsilon > 0$ съществува индекс ν_2, такъв че от $n > \nu_2$ да следва $b-\varepsilon < b_n < b+\varepsilon$. Нека да фиксираме $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$[3] и $\nu = \max(\nu_1, \nu_2)$. Тогава за $n > \nu$ получаваме

$$\frac{a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2} = a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon = a + \frac{a-b}{2} = \frac{3a-b}{2}$$

$$\frac{-a+3b}{2} = b - \frac{a-b}{2} = b-\varepsilon < b_n < b+\varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

т.е. получаваме, че

$$b-\varepsilon < b_n < b+\varepsilon = \frac{a+b}{2} = a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$$

следователно $b_n < a_n$ за $n > \nu$, което е в противоречие с условието. ■

Забележка 1: Всъщност не е задължително и неравенството $a_n \leq b_n$ да е изпълнено за $\forall n \in \mathbb{N}$. Оказва се достатъчно $a_n \leq b_n$ да е изпълнено за безброй много стойности на n. Доказателството се прави по аналогичен начин.

[3] Как се досещаме, че това трябва да е изборът за ε? Целта ни е да получим противоречие между неравенствата $b-\varepsilon < b_n < b+\varepsilon$ и $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$, използвайки, че $b < a$ и $a_n \leq b_n$. Използвайки, че $b < a$, то със сигурност можем да изберем конкретно ε такова, че да е изпълнено $b_n < b+\varepsilon \leq a-\varepsilon < a_n$ (тук считам, че е видно противоречието с $a_n \leq b_n$). От тук можем да заключим, че подходящ избор би бил $\varepsilon \leq \frac{a-b}{2}$, за да докажем противоречието.

Забележка 2: Дали ако в горната теорема е изпълнено $a_n < b_n$ за всяко n, то следва ли, че $a < b$? Отговорът е не. Ще дам контрапример. Да разгледаме редиците $a_n = \frac{1}{n}$ и $b_n = 0$. То тогава е очевидно, че $a_n = 0 < \frac{1}{n} = b_n$ за всяко $n > 0$. Но както видяхме в **пример 4.6** границата на редицата a_n е 0, каквато е и границата на редицата b_n (от предишното твърдение), т.е. $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

3. Ако a_n е сходяща, то тя е ограничена.

<u>Доказателство:</u>
Нека границата на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е a. Избираме $\varepsilon > 0$ произволно, например $\varepsilon = 999$. Тогава съществува $\nu \in \mathbb{N}$, такова от $n > \nu$ да следва $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Остава да докажем, че a_n принадлежи на краен интервал при $n \leq \nu$. Нека да означим с $m_1 = \min\{a_1, a_2, ..., a_\nu, a-\varepsilon\}$, а $m_2 = \max\{a_1, a_2, ..., a_\nu, a+\varepsilon\}$. От тук получаваме, че $m_1 \leq a_n \leq m_2$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. От където следва, че всяка сходяща редица е и ограничена. ■

4. Нека a_n и c_n са сходящи и имат граница l и $a_n \leq b_n \leq c_n$ за $n > \nu$, където $\nu \in \mathbb{N}$. Тогава b_n е сходяща и има граница l.

Забележка: Това свойство е известно още с името лема за двамата полицаи (лема за двамата милиционери), защото ако си подхванат от двете страни от по един полиций и двамата отиват в затвора, то ти отиваш в затвора.

<u>Доказателство:</u>
Избираме $\varepsilon > 0$. Тогава съществува $N_1 \in \mathbb{N}$, такова че от $n > N_1$ следва $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$ (понеже a_n е сходяща и има граница l). Освен това съществува $N_2 \in\ N$, такова че от $n > N_2$ да следва $l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$. От условието получаваме, че $a_n \leq b_n \leq c_n$ за $n > \nu$. Тогава за $n > \max\{N_1, N_2, \nu\}$ имаме:

$$l - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \varepsilon$$

Така получихме, че $l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon$ за $n > \max\{N_1, N_2, \nu\}$, което означава, че b_n е сходяща и има граница l. ■

Следствие 4.1: Нека $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, а $\{b_n\}$ е ограничена редица, то тогава $a_n.b_n \to 0$.

Доказателство:
Понеже $\{b_n\}$ е ограничена редица, то съществува M, такова че $|b_n| \leq M$. Тъй като a_n е сходяща и има граница 0, то тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\nu \in \mathbb{N}$ такова, че от $n > \nu$ да следва $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$. Взимайки предвид последните две неща стигаме до извода, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\nu \in \mathbb{N}$ такова, че от $n > \nu$ да следва $|a_n b_n| < \varepsilon M$. Искаме да докажем, че $\{a_n.b_n\}$ е сходяща и клони към 0, т.е. за всяко $\varepsilon_0 > 0$ съществува $\nu_0 > 0$ такова, че от $n > \nu_0$ да следва

$$|a_n \cdot b_n - 0| = |a_n \cdot b_n| < \varepsilon_0.$$

За целта фиксираме $\varepsilon_0 > 0$ и избираме $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{M}$. Знаем, че е изпълнено следното: за произволно ε съществува $\nu > 0$ такова, че от $n > \nu$ да следва

$$|a_n \cdot b_n - 0| = |a_n \cdot b_n| < \frac{\varepsilon_0}{M} \cdot M = \varepsilon_0.$$

От което почти следва това, което искаме да докажем с изключение, че последното е изпълненено $\nu > 0$. А за да докажем твърдението трябва да намерим ν_0, за което ще е изпълнено. Близко до ума е, че ще изберем $\nu_0 > \nu > 0$. ■

Но какъв е проблемът, ако b_n е неограничена редица? Нали в училище са ни учили че нула, по каквото и да е число е нула. За да видим по ясно къде е проблемът да разгледаме следния пример:

Пример 4.16: Нека да разгледаме 2 редици с общи членове съответно $a_n = \frac{1}{n}$ и $b_n = 2n$. В предишните примери показахме, че $\{a_n\}$ е сходяща и границата и е 0 и че $\{b_n\}$ е неограничена. Какво се случва с произведението на двете редици - $c_n = a_n.b_n = \frac{1}{n} \cdot 2n = 2$. Получихме редица с граница 2.

5. Ако $\{a_n\}$ е сходяща и клони към a, то и $\{|a_n|\}$ е сходяща и клони към $|a|$.

<u>Доказателство:</u>

Редицата $\{a_n\}$ е сходяща и клони към a, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\eta \in \mathbb{N}:\ n > \eta \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

От това следва, че

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\eta \in \mathbb{N}:\ n > \eta \Rightarrow ||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon,$$

т.е.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\eta \in \mathbb{N}:\ n > \eta \Rightarrow ||a_n| - |a|| < \varepsilon.$$

Следователно $\{|a_n|\}$ е сходяща и клони към $|a|$. ■

6. Ако $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ са сходящи и с граници съответно a и b, тогава:

   (а) $\{a_n + b_n\}$ е сходяща и клони към $a + b$;

   (б) $\{a_n - b_n\}$ е сходяща и клони към $a - b$;

   (в) $\{a_n \cdot b_n\}$ е сходяща и клони към $a \cdot b$;

   (г) ако $b \neq 0$, то редицата $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ е сходяща и клони към $\frac{a}{b}$;

<u>Доказателство:</u>

Редицата $\{a_n\}$ е сходяща и клони към a, т.е.

$$\forall\varepsilon_1 > 0\ \exists\eta_1 \in \mathbb{N}:\ n > \eta_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon_1.$$

Редицата $\{b_n\}$ е сходяща и клони към b, т.е.

$$\forall\varepsilon_2 > 0\ \exists\eta_2 \in \mathbb{N}:\ n > \eta_2 \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon_2.$$

(а) Искаме да докажем, че

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\eta \in \mathbb{N}:\ n > \eta \Rightarrow |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon.$$

Лесно се вижда, че ако изберем $\eta = max(\eta_1, \eta_2)$, то от $n > \eta$ ще следва

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| < |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

За да докажем твърдението, трябва да получим

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon.$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно, а $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогава получаваме, че

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta \in \mathbb{N} : \ n > \eta \Rightarrow |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon,$$

с което доказахме твърдението.

(б) Трябва да докажем, че редицата $\{a_n - b_n\} = \{a_n + (-b_n)\}$ е сходяща. За целта ще докажем, че от сходимостта на $\{b_n\}$ следва, че $\{-b_n\}$ е сходяща и границата ѝ е $-b$. Използвайки този факт и (а) (т.е. сборът на сходящи редици е сходяща редица), получаваме, че $\{a_n - b_n\}$ е сходяща и границата и е $a - b$.

Остава да докажем, че от сходимостта на $\{b_n\}$ следва сходимостта на $\{-b_n\}$. Фиксираме $\varepsilon > 0$. Понеже редицата $\{b_n\}$ е сходяща, то съществува $\nu_2 \in \mathbb{N}$ такова, че от $n > \nu_2$ да следва $|b_n - b| < \varepsilon$. Тогава при $n > \nu_2$ е изпълнено:

$$|(-b_n) - (-b)| = | - b_n + b| = |b_n - b| < \varepsilon,$$

с което доказахме, че $-b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -b$.

(в) Пресмятаме последователно

$$\begin{aligned} 0 &\leq |a_n.b_n - a.b| = |a_n.b_n - a_n.b + a_n.b - a.b| \\ &\leq |a_n.b_n - a_n.b| + |a_n.b - a.b| \\ &= |a_n.(b_n - b)| + +|(a_n - a).b| \\ &\leq |a_n|.|b_n - b| + |a_n - a|.|b|. \end{aligned}$$

Понеже $\{a_n\}$ е сходяща, то и $\{|a_n|\}$ е сходяща и следователно $\{|a_n|\}$ е ограничена. Редицата $\{c_n\} := \{b_n - b\}$ е сходяща и клони към $b - b = 0$ като разлика на две редици. Тогава и редицата $\{|c_n|\}$ е сходяща и клони към $|0|$. Следователно по следствие 1 $|a_n|.|b_n - b| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Аналогично $|a_n - a|.|b| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Така получихме, че $|a_n|.|b_n - b| + |a_n - a|.|b|$ клони към 0 и следователно

$$0 \leq |a_n.b_n - a.b| \leq |a_n|.|b_n - b| + |a_n - a|.|b| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (2)$$

По лемата за двамата полицаи следва, че $|a_n.b_n - a.b| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, т.е. $a_n.b_n$ е сходяща и клони към $a.b$.

(г) Ще докажем, че ако $b \neq 0$ и $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$, то $\frac{1}{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{b}$. То тогава от предишните доказателства ще следва:

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

и с това теоремата ще е доказана. Тъй като $b \neq 0$, следователно $|b| > 0$.

i. Нека да разгледаме първо случая $b > 0$. Тогава пресмятаме последователно:

$$0 \leq \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n \cdot b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot b} \tag{3}$$

Тъй като b_n клони към $b > 0$, то тогава от някакъв индекс нататък всички членове на редицата ще са положителни. По-конкретно нека да фиксираме $\varepsilon_2 \leq \frac{b}{2}$. Тогава съществува $\eta_2 \in \mathbb{N}$ такова, че от $n > \eta_2$ да следва

$$|b_n - b| < \frac{b}{2} \Leftrightarrow -\frac{b}{2} < b_n - b < \frac{b}{2} \Leftrightarrow \frac{b}{2} < b_n < \frac{3b}{2}.$$

Така получаваме, че $b_n > \frac{b}{2} > 0$ е в сила при $n > \nu_2$. Следователно $\frac{1}{b_n} < \frac{2}{b}$ е изпълнено при $n > \nu_2$. Замествайки в (3), получаваме

$$0 \leq \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n \cdot b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot b} \leq \frac{2}{b^2}|b - b_n| =: d_n$$

при $n > \nu_2$. Нека да означим с e_n членовете на редицата d_n, за които е изпълнено $n > \nu_2$, т.е. от редицата d_n сме премахнали първите ν_2 члена. Тъй като $|b - b_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то и $d_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и следователно $e_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Така получаваме

$$0 \leq \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \leq e_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

И от лемата за двамата милиционери следва, че $\frac{1}{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{b}$.

ii. Аналогично, ако $b < 0$. Опитайте се да го докажете сами.

И така поличихме, че редицата $\frac{a_n}{b_n}$ е сходяща и клони към $\frac{A}{B}$. ■

Понякога думата „клони“ се използва и по отношение на редици, които са разходящи. Оказва се удобно да се въведе следната дефиниция:

Определение 4.11: Казваме, че редицата a_n клони към $+\infty$ (бележим с $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$), ако за всяко число M съществува ν такова, че от $n > \nu$ да следва $a_n > M$.

Или с думи прости – колкото и голямо число M да изберем, то безброй много членове на редицата ще са по-големи от него.

Пример 4.17: Да разгледаме редицата $a_n = n$. Тази редица клони към $+\infty$. Да допуснем противното, т.е. съществува число $M > 0$, такова че $a_n \leq M$. Да разгледаме числото $\lceil M \rceil$ (което означава най-малкото цяло число по-голямо от M). То $\lceil M \rceil$ е член от $\{a_n\}$ и $\lceil M \rceil \geq M$. Така достигнахме до противоречие. Следователно доказахме, че редицата клони към $+\infty$.

Определение 4.12: Казваме, че редицата a_n клони към $-\infty$ (бележим с $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$), ако за всяко число M съществува ν такова, че от $n > \nu$ да следва $a_n < M$.

Пример 4.18: Да разгледаме редицата $a_n = -5n$. Тази редица клони към $-\infty$. Доказателството е аналогично на предния пример.

Теорема 4.1: Нека е дадена редицата a_n, като $a_n > 0$ за всяко n. Да образуваме редицата $b_n = \frac{1}{a_n}$. Тогава ако

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$, то $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

Доказателство:

1. Нека е изпълнено $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$. Да изберем едно произволно положително число A. Ако $\varepsilon = \frac{1}{A}$, то по дефиницията за сходяща редица съществува ν, такова че при $n > \nu$ имаме $|a_n - 0| < \varepsilon = \frac{1}{A}$, т.е. получихме $a_n < \frac{1}{A}$. Следователно $A < \frac{1}{a_n}$ при $n > \nu$. Това означава, че $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.

2. Нека е изпълнено $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Да изберем едно произволно положително число A. Ако $\varepsilon = \frac{1}{A}$, то по дефиницията за редица, клоняща към $+\infty$ съществува ν такова, че от $n > \nu$ да следва $a_n > A$. Така получихме $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$ и следователно

$$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| = \frac{1}{a_n} < \varepsilon$$

при $n > \nu$. Това означава, че $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$. ■

Теорема 4.2: Нека е дадена редицата a_n, като $a_n < 0$ за всяко n. Да образуваме редицата $b_n = \frac{1}{a_n}$. Тогава ако

1. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, то $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$
2. $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, то $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

Доказателство: Доказателството е аналогично на предишното.