3.Числови функции, графики. Обратно изображение

Определение 3.1: Изображение φ от множеството X в множеството Y наричаме правило, по което на всяко x от X се съпоставя **точно** един елемент y от Y. Множеството X се нарича дефиниционно множество за φ, елементът y – образ на елемента x при изображението φ (често се означава с $y = f(x)$), а елементът x – първообраз на y при изображението φ. Често изображенията се означават чрез $\varphi(x)$, $\varphi : X \to Y$, където $\varphi(x)$ е конкретното правило за пресмятане на функцията.
Забележка 1: Ако X и Y са числови множества, обикновено вместо общия термин „изображение“ се използва „функция“. Тогава променливата x се нарича аргумент на функцията, а елементът $y = f(x)$ – стойност на функцията f при дадена стойност на аргумента x.
Забележка 2: Тази дефиниция е интуитивна, тъй като „правило“ не е формално дефинирана.
Забележка 3: От една страна за всяко $x \in X$ можем да пресметнем неговия образ по единствен начин. От друга страна е възможно всеки елемент y е възможно да има 0, 1 или повече от един първообраз.

Основните функции, изучавани в училище, са

- полином от степен n:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0,\ \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

  където $a_n \neq 0$;

- показателна функция:

$$f(x) = a^x,\ \ f : \mathbb{R} \to (0, \infty),$$

  където $a > 0$, $a \neq 1$;

- логаритмична функция:

$$f(x) = \log_a x, \ f : (0, \infty) \to \mathbb{R},$$

  където $a > 0, a \neq 1$;

- тригонометрични функции. Примери за тригонометрични функции са $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$.

Пример 3.1: Пресметнете стойностите на функцията

$$f(x) = x^2, \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

при $x = 1$, $x = 5$ и $x = 0$. Ясно е, че $f(1) = 1 \times 1 = 1$, $f(5) = 5 \times 5 = 25$, $f(2.5) = 0 \times 0 = 0$.

Определение 3.2: Множеството от образите на всички елементи в X се нарича множество от функционалните стойности на функцията f и бележим с Imf или с $f(X)$.

Поради по-горните съждания можем да заключим, че $Imf \subset Y$.

Определение 3.3: Дадена е функция $f : X \to Y$. Нека $Z \subset X$. Тогава функцията $f : Z \to Y$ ще наричаме рестрикция (ограничение) на функцията f върху Z и ще бележим с $f|_Z$.

Пример 3.2: Пресметнете стойностите на функцията

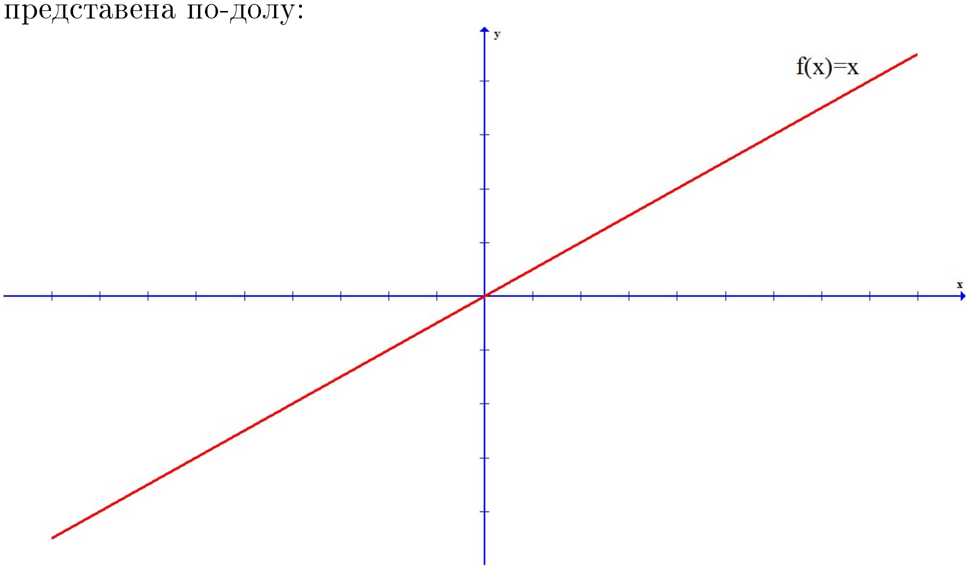
$$g(x) = x^2, \ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

при $x = 1$, $x = 5$ и $x = 0$. Ясно е, че $g(1) = 1$, $g(5) = 25$. Обърнете внимание, че 0 не е от дефиниционното множество на функцията и поради това функцията не е дефинирана за $x = 0$. Функцията g е рестрикция на f върху множеството на естествените числа. Множеството от функционалните стойности на g е $[0, +\infty)$.

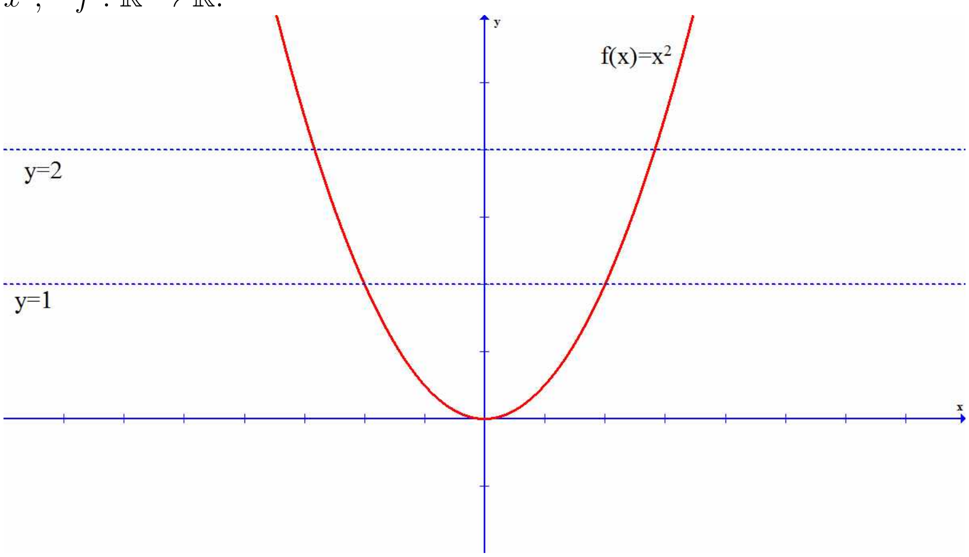
Геометрично функциите се представят чрез своите графики:

Определение 3.4: Графика на функцията f наричаме съвкупността от точки $(x, f(x))$ в $X \times Y$, където $x \in X$, $f(x) \in Y$.

Пример 3.3: Графиката на функцията $f(x) = x, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е представена по-долу:



Пример 3.4: Нека да начертаем графиката на функцията $f(x) = x^2, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:



Определение 3.5: Казваме, че функцията f е инекция, ако от това че $x_1 \neq x_2$ следва $f(x_1) \neq f(x_2)$.

По-простичко, ако f е инективна, то различни аргументи x отиват в различни стойности y. Това означава, че към всеки елемент y от Y има най-много 1 първообраз.

Пример 3.5: $f(x) = x(x-2), \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не е инекция, защото $f(0) = 0 = f(2)$.

Пример 3.6: $f(x) = x, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е инекция, защото ако $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) = x_1 \neq x_2 = f(x_2)$.

Определение 3.6: Казваме, че f е сюрекция, ако $\forall y \in Y \quad \exists x \in X : f(x) = y$.

Ако f е сюрекция, то всеки елемент y от Y има поне 1 първообраз ($Imf = Y$).

Пример 3.7: Функцията $f(x) = x(x-2), \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не е сюрекция, защото върхът на параболата е в $-\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$ и минималната стойност на $f(x)$ е f(1)=-1, т.е. не е възможно да получим стойности на функцията, по-малки от -1.

Пример 3.8: $f(x) = x, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е сюрекция, защото каквото и y да изберем, винаги ще съществува x такова, че $f(x) = y$.

Определение 3.7: Казваме, че f е биекция, ако е инекция и сюрекция.

Пример 3.9: Очевидно е, че $f(x) = x, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е биекция (доказахме в предните примери, че е инекция и сюрекция).

Определение 3.8: Обратната на функцията $f : X \to Y$ се нарича функцията, която съпоставя на всеки елемент $y \in Y$ точно един елемент $x \in X$ по правилото $f^{-1}(y) = x$. Пишем $f^{-1} : Y \to X$.

Забележка: За да бъде функцията f обратима, е необходимо f да е биективна.

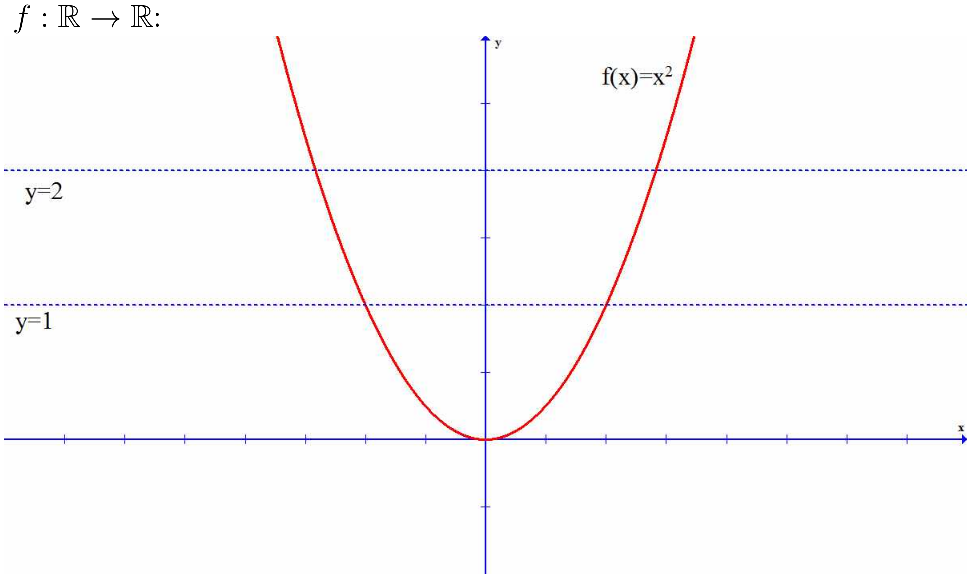
- Ако една функция не е инективна, то различни x няма да отиват в различни y. Ако обърнем една такова функция, ние всъщност няма да получим функция, защото при едно и също y можем да получим различни x, което противоречи на дефиницията на функция.

- Ако една функция не е сюрективна, то няма да е възможно за всяко y от Y да намерим x от X, такова че $y = f(x)$. Ако се опитаме да намерим обратната на такава функция, няма да получим функция, защото по определението за функция трябва на всяко y да съответства поне едно x, а в случая няма да е така.[1]

В сила са следните свойства за обратни функции:

$$\begin{array}{rcll} f^{-1}(f(x)) & = & x & \forall x \in X \\ f(f^{-1}(y)) & = & y & \forall y \in Y \end{array}$$

Пример 3.10: Нека да разгледаме графиката на функцията $f(x) = x^2,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:



От нея е видно, че

[1]Между другото съществуват дефиниции за ляв обратен и десен обратен на дадена функция, като едното съществува точно за инекциите, а другото – за сюрекциите. Тогава обратната функция на биекция е едновременно ляв обратен и десен обратен. На този въпрос няма да се спираме подробно.

1. $y \geq 0 \quad \forall x \in X$, т.е. за да бъде изображението сюрекция би трябвало множеството от стойностите на функцията да бъде $[0, +\infty)$. Последното следва от определението за сюрекция.

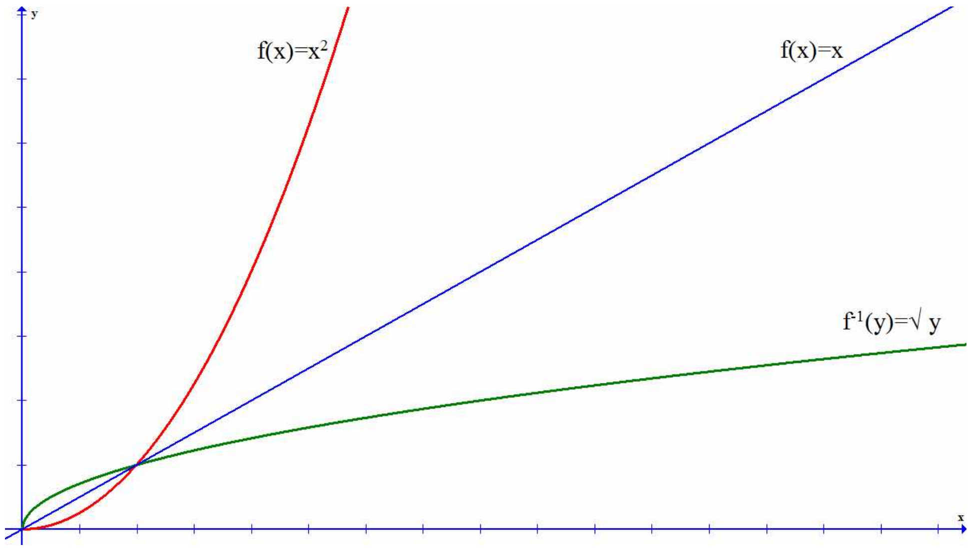
2. функцията не е инекция. Това може да се заключи много лесно, като се начертаят прави, успоредни на абцисната ос (т.е. $y = const$). Ако функцията е инекция, всяка такава права трябва най-много веднъж да пресича графиката на функцията (последното следва директно от определението за инекция). В разглеждания случай очевидно това не е вярно. Сега възниква въпросът можем ли да конструираме инективна функцията, която да се базира на f? За да направим това, трябва да „намалим“ дефиниционната област, така че правите, успоредни на абцисата, да не пресичат повече от веднъж графиката на функцията, като по този начин ще получим друга функция. Лесно може да се съобрази, че ако махнем изцяло частта от графика наляво от ординатата, ще получим инекция. Остава да докажем, че получената функция $f(x) = x^2,\ f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ е инекция чрез определението за инекция.

   Доказателство: Нека $x_1 \neq x_2$ и $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, тогава трябва да проверим дали е изпълнено $f(x_1) = x_1^2 \stackrel{?}{=} x_2^2 = f(x_2)$. Да допуснем противното, т.е. че съществуват различни x_1, x_2, за които е в сила равенството $f(x_1) = x_1^2 = x_2^2 = f(x_2)$. Следователно $0 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$. Но $x_1 \neq x_2$ влече условието $x_1 + x_2 = 0$. От тук следва, че $x_1 = x_2 = 0$ (тъй като $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$), което е в противоречие с $x_1 \neq x_2$. Така получаваме, че $f(x_1) = x_1^2 \neq x_2^2 = f(x_2)$ за $x_1 \neq x_2$, т.е. $f(x) = x^2,\ x \in [0, +\infty)$ е инективна функция.

   Забележка: Ако махнем изцяло частта от графиката надясно от ординатата, ще се получи друга биекция.

Така получихме, че функцията $f(x) = x^2,\ f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ е биекция. Следователно можем да дефинираме нейната обратната по следния начин: $f^{-1}(y) = \sqrt{y},\ f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$.

Нека да начертаем графиките на функциите f и f^{-1} в една координатна система:

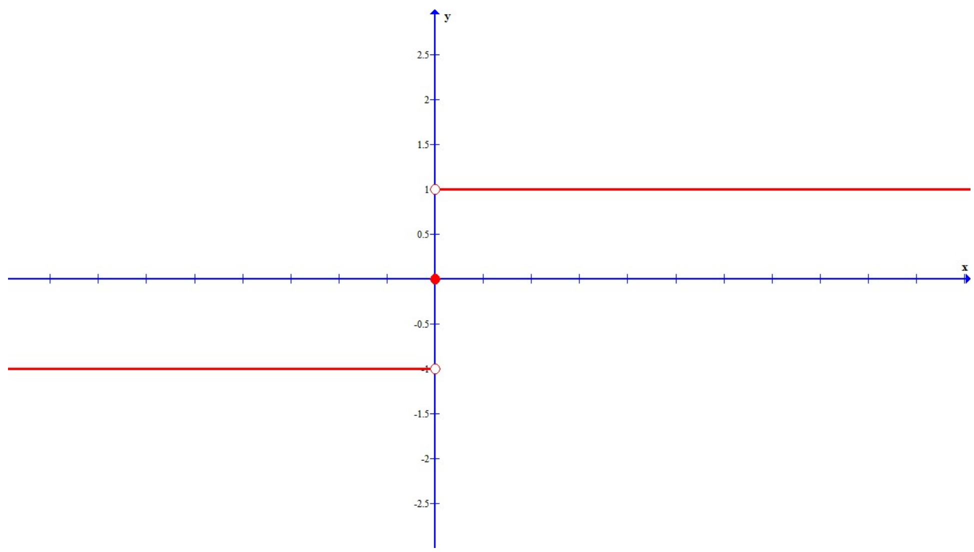


Графиката на $f(x)$ се дефинира като множеството от точки $(x, f(x))$, а графиката на обратната – като множеството от точки $(x, f^{-1}(x))$, където $x, f(x), f^{-1}(x) \in [0, +\infty)$. Ако точката $(x_*, f(x_*))$ принадлежи на графиката на f, то точката $(f(x_*), x_*)$ принадлежи на графиката на обратната (формално за точката с ордината x_*, която лежи на графиката на обратната, е изпълнено, че $x* = y = f^{-1}(x)$ или еквивалентно $x = f(x_*)$). Може да се докаже, че точките $(x, f(x))$ и $(f(x), x)$ лежат на права, успоредна на ъглополовящата на втори и четвърти квадрант. Следователно те са осевосиметрични спрямо ъглополовящата на първи и трети квадрант.

Пример 3.11(Sign function): Да разгледаме функцията $sgn(x) : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$, която се дефинира по следния начин:

$$sgn(x) = \begin{cases} -1, & \text{ако } x < 0, \\ 0, & \text{ако } x = 0, \\ 1, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Тази функция показва знака на дадено число и нейната графика изглежда така:



Проверете сами, че функцията е сюрективна, но не е инективна.

Пример 3.12(Функция на Дирихле): Да разгледаме функцията $D : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$, която е дефинирана по следния начин:

$$D_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x \in Q, \\ 0, & \text{ако } x \in I, \end{cases}$$

Стойността на тази функция показва дали дадено реално число е рационално или е ирационално. Ясно е, че функцията D_1 е сюрективна, но тя не е инективна, тъй като $D_1(1) = D_1(2) = 1$. Невъзможно е да се начертае графиката на функцията D_1.

Пример 3.13(Модифицирана функция на Дирихле): Да разгледаме функцията $D_1 : [0, 1] \to [0, 1]$:

$$D(x) = \begin{cases} x & \text{ако } x \in Q, \\ 1 - x & \text{ако } x \in I, \end{cases}$$

Тази функция показва дали дадено реално число е рационално или е ирационално. Отново е ясно, че функцията D е сюрективна. Но дали тя е инективна?

1. Ако $x_1 \in \mathbb{Q}$, $x_2 \in \mathbb{Q}$ и $x_1 \neq x_2$, тогава получаваме $D(x_1) = x_1 \neq x_2 = D(x_2)$, т.е. D е инективна в този случай.

2. Ако $x_1 \in \mathbb{I}$, $x_2 \in \mathbb{I}$ и $x_1 \neq x_2$, тогава получаваме $D(x_1) = 1 - x_1 \neq 1 - x_2 = D(x_2)$, т.е. D е инективна и във втория случай

3. Ако $x_1 \in \mathbb{Q}$, $x_2 \in \mathbb{I}$ и $x_1 \neq x_2$, тогава трябва да проверим дали е изпълнено следното: $D(x_1) \neq D(x_2)$. Пресмятаме последователно $D(x_1) = x_1 \in \mathbb{Q}$, $D(x_2) = 1 - x_2 \in \mathbb{I}$. Тъй като $\mathbb{I} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$, получаваме $D(x_1) \neq D(x_2)$. От където следва инективност и в този случай.

От тези разглеждания заключаваме, че D е биекция.

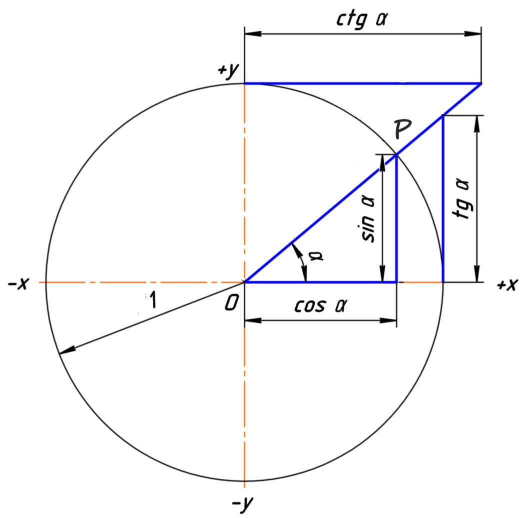
Остава да намерим обратната на D. Нека с $D|_Q$ да обозначим рестрикцията на D върху множеството $\mathbb{Q}[0,1]$ (множеството от рационалните числа в интервала $[0,1]$). Тогава $D|_Q(x) = x$. Ясно е от предишните доказателства, че $D|_Q(x) = x$ е биективна. Тогава обратната ѝ е $D^{-1}|_Q(y) = y$.

Аналогично разглеждаме рестрикцията на D върху множеството $\mathbb{I}[0,1]$ (множеството на ирационалните числа в интервала $[0,1]$). Тогава $D|_I$ е биективна и обратната и е $D^{-1}(y) = x = 1 - y$. Така окончателно за обратната на D получихме:

$$D^{-1}(y) = \begin{cases} y, & \text{ако } y \in \mathbb{Q}, \\ 1 - y, & \text{ако } y \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Както вероятно се досещате, е невъзможно да се начертае графиката на тази функция.

Обратни тригонометрични функции Разглеждаме единична окръжност с център O в ортонормирана координатна система Oxy. Нека P е точка от окръжността, а α е ъгълът между $\overrightarrow{OP}$ и положителната посока на оста Ox, измерен в радиани, т.е.



Тогава:

1. x-координатата на т. P се нарича косинус от α (пишем $\cos(\alpha)$);

2. y-координатата на т. P се нарича синус от α (пишем $\sin(\alpha)$);

3. числото $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ се нарича тангенс от α (пишем $\operatorname{tg}(\alpha)$);

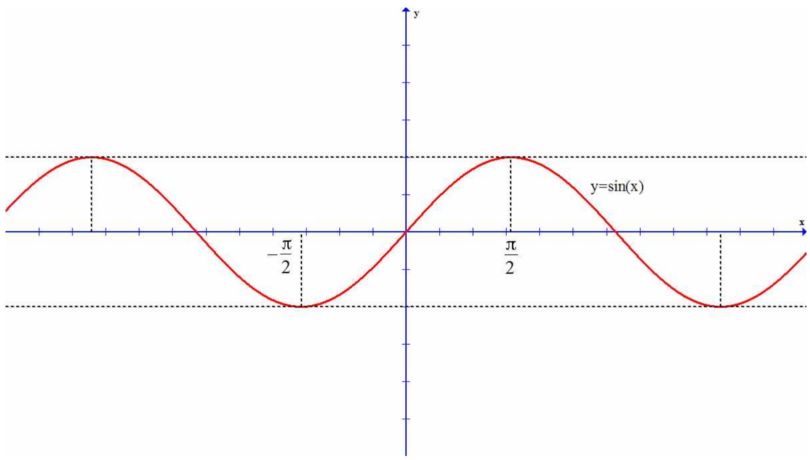
4. числото $\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ се нарича котангенс от α (пишем $\cot(\alpha)$).

Сега ще дефинираме поотделно обратните функции на тригонометричните:

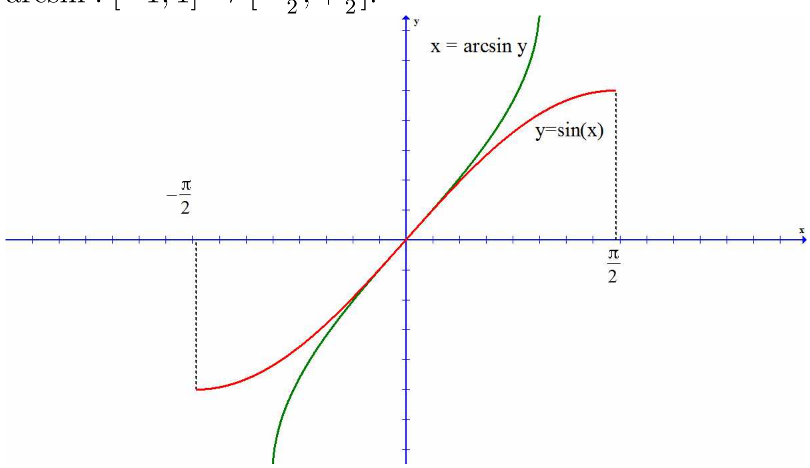
1. $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

   От начина на дефиниране на $\sin$ се вижда, че тя е сюрективна функция. Но очевидно, че не е инективна, защото

$$\sin(0) = \sin(\pi) = \sin(2\pi) = ... = 0.$$



Разглеждаме рестрикцията на sin върху интервала $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ (в тези граници sin пробягва всички стойности в интервала $[-1, 1]$ без повторение). Тогава $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]}$ е биекция и поради това можем да намерим нейната обратна функция, която обикновено се бележи с $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.

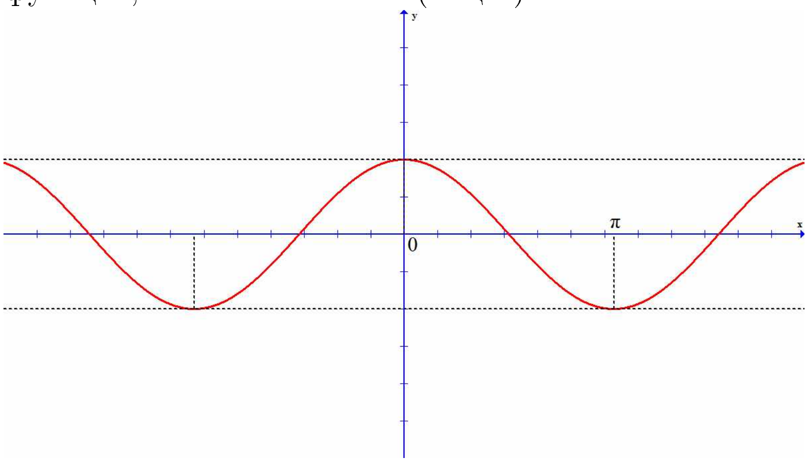


От свойствата на обратните функции получаваме, че:

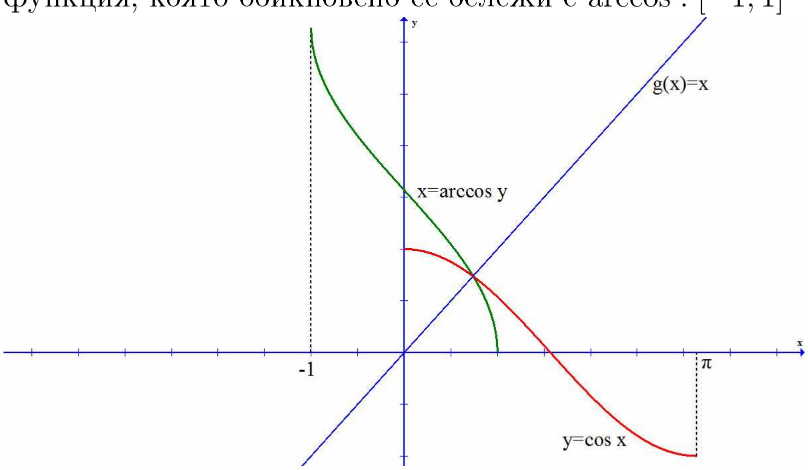
$$\arcsin(\sin(x)) = x \qquad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$
$$\sin(\arcsin(y)) = y \qquad \forall y \in [-1; +1]$$

2. $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

От начина на дефиниране на cos се вижда, че тя е сюрективна функция, но не е инективна (защо?).



Разглеждаме рестрикцията на cos върху интервала $[0, \pi]$. Тогава $\cos|_{[0,\pi]}$ е биекция и поради това можем да намерим нейната обратна функция, която обикновено се бележи с $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

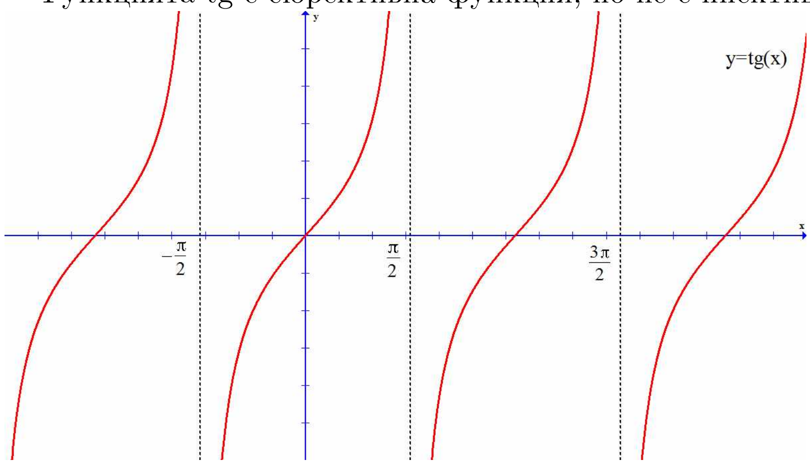


От свойствата на обратните функции получаваме, че:

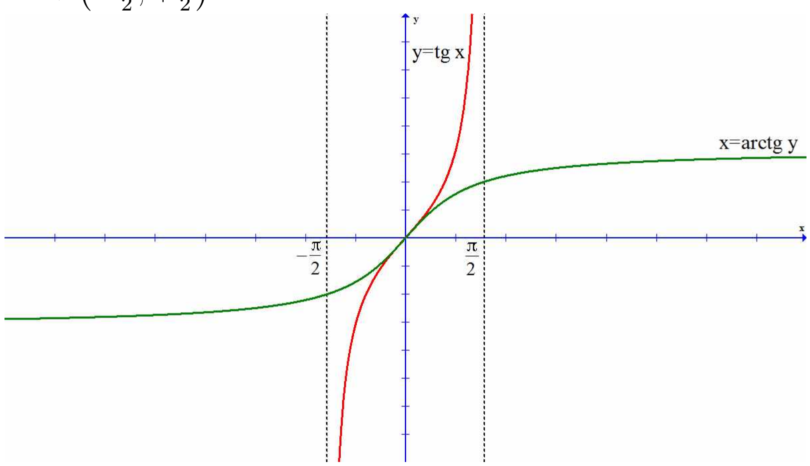
$$\arccos(\cos(x)) = x \qquad \forall x \in [0, \pi]$$
$$\cos(\arccos(y)) = y \qquad \forall y \in [-1; +1]$$

3. $\mathrm{tg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Функцията tg е сюрективна функция, но не е инективна.



Функцията $\mathrm{tg}|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}$ е биекция и поради това можем да намерим нейната обратна функция, която обикновено се бележи с $\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right)$.

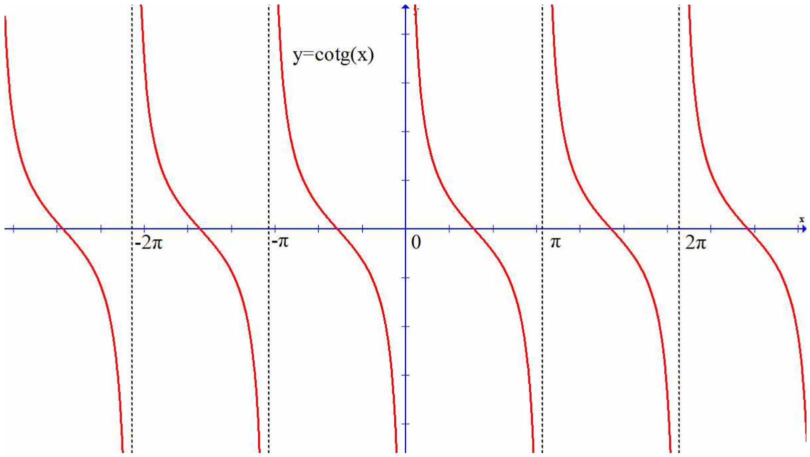


От свойствата на обратните функции получаваме, че:

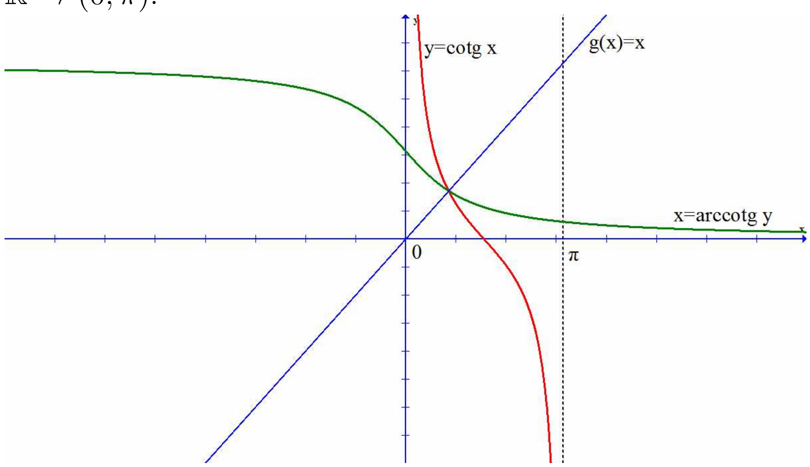
$$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(x)) = x \qquad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}(y)) = y \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

4. $\mathrm{cotg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

От начина на дефиниране на cotg се вижда, че тя е сюрективна функция. Но очевидно, че не е инективна.



Разглеждаме рестрикцията на cotg върху интервала $(0, \pi)$, която може да се докаже, че е биекция. Поради това можем да намерим нейната обратна функция, която обикновено се бележи с $\mathrm{arccotg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$.



От свойствата на обратните функции получаваме, че:

$$\begin{aligned} \mathrm{arccotg}(\mathrm{cotg}(x)) &= x \qquad && \forall x \in (0, \pi) \\ \mathrm{cotg}(\mathrm{arccotg}(y)) &= y \qquad && \forall y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Искам да подчертая, че така дефинираните обратни тригонометрични функции са само една от многобройните възможности за дефинирането им.

Твърдение 3.1: $\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arccotg}(x) = \frac{\pi}{2}$

Доказателство:
Нека $\alpha = \operatorname{arctg}(x)$ при $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right)$.
Тогава

$$\operatorname{arccotg}(x) = \operatorname{arccotg}(\operatorname{tg}\alpha) = \operatorname{arccotg}\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right).$$

Понеже $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2})$, то получаваме последователно:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &< \alpha < +\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} &< -\alpha < +\frac{\pi}{2} \\ 0 &< \frac{\pi}{2} - \alpha < \pi \end{aligned}$$

Следователно можем да приложим второто основно свойство за arccotg и заключваме

$$\operatorname{arccotg}(x) = \operatorname{arccotg}\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

По този начин достигаме до извода:

$$\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arccotg}(x) = \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

■

Определение 3.9: Дадени са функциите $f : X \to Y,\ g :\ Y \to Z$. Функцията $h : X \to Z$, зададена по правилото:

$$h(x) = g(f(x))$$

се нарича сложна функция.