27.Теорема на Лайбниц-Нютон. Правило за пресмятане на определен интеграл

Теорема 27.1 (на Лайбниц-Нютон) : Нека $f(t)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и $x \in [a, b]$ и $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, то $F(x)$ е диференцируема и $F'(x) = f(x)$.

Доказателство:
Тъй като $f(t)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, то $f(t)$ е непрекъсната в интервала $[a, x] \subseteq [a, b]$, то $f(t)$ е интегруема в интервала $[a, x]$. Тогава можем да разгледаме $\int\limits_a^x f(t)dt$. Тя е функция само на x (виж предната тема), нека да означим $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Нека да разгледаме диференчното частно:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int\limits_a^{x+h} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt}{h} = \frac{\int\limits_a^{x+h} f(t)dt + \int\limits_x^a f(t)dt}{h} = \\ = \frac{\int\limits_x^{x+h} f(t)dt}{h} \tag{1}$$

Но по теоремата за средните стойности:

$$\int\limits_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi)(x - (x+h)) = f(\xi)h$$

като $\xi \in [x, x+h]$ и след като заместим в (1):

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(\xi)h}{h} = f(\xi),$$

Да пуснем $h \to 0$. Тъй като $x \leq \xi \leq x+h$, то $\xi \to x$ и тогава:

$$F'(x) = \lim_{x \to F(x+h)-F(x)} h = \lim_{x \to x_0} f(\xi) = f(x) \blacksquare$$

Формула на Лайбниц-Нютон Нека $f(t)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$ и $x \in [a,b]$ и Φ е примитивна за $f(x)$, то тогава:

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a) = |\Phi(x)|_a^b$$

<u>Доказателство:</u>

Понеже Φ е примитивна на $f(x)$ т.е. $\Phi'(x) = f(x)$. Нека $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. От теоремата на Лайбниц-Нютон следва, че $F(x)$ също е примитивна на $f(x)$ т.е. $F'(x) = f(x)$. Така получаваме $\Phi'(x) = f(x) = F'(x)$, т.е. $F(x) = \Phi(x) + C$. Тогава $F(a) = \Phi(a) + C$.. Но от дефиницията на $F(x)$ имаме, че:

$$F(a) = \int\limits_a^a f(x) = f(\xi)(a-a) = 0$$

Така изкарахме, че:

$$0 = \Phi(x) + C \Rightarrow C = -\Phi(a)$$

т.е. $F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$. Понеже искаме да сметнем $F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$, то нека да го заместим в $F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$:

$$F(b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

И така получихме, каквото искахме:

$$F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a). \blacksquare$$