26.Теорема за средните стойности

Теорема 26.1: Нека $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в интервала $[a, b]$ и $g(x)$ не сменя знака си в $[a, b]$. Тогава ако $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, то съществува $\mu \in [m, M]$, такова че

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказателство:
Преди да започнем със самото доказателство на теоремата да дадем малко разяснения по формулировката:

1. Тъй като $f(x)$ е интегруема в $[a, b]$, то тя е ограничена в $[a, b]$. Тогава ще съществуват крайни числа m и M, такива че $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$. Като очевидно $m < M$ т.е. $[m, M]$ ще бъде краен затворен интервал.

2. Тъй като $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в интервала $[a, b]$, то $f(x)g(x)$ също е интегруема в интервала $[a, b]$(последната теорема от предишната тема).

А сега към доказателството.

1. Нека $g(x) \geq 0$ в $[a, b]$. Понеже $m \leq f(x) \leq M$, то като умножим неравенството с $g(x) \geq 0$ получаваме:

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

Тъй като всяка една от функциите $mg(x)$, $f(x)g(x)$, $Mg(x)$ е интегруема в $[a,b]$ като произведение на интегруеми функции в $[a,b]$ и твърденията за интегриране на неравенства получаваме:

$$\begin{aligned} \int\limits_a^b mg(x)dx &\leq \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq \int\limits_a^b Mg(x)dx \\ m\int\limits_a^b g(x)dx &\leq \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int\limits_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

Понеже $g(x) \geq 0$ за всяко $x \in [a,b]$, то тогава $\int\limits_a^b g(x)dx \leq 0$. Сега ще разгледаме 2 случая:

(a) $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$, то тогава за неравенството получаваме:

$$\begin{aligned} m\int\limits_a^b g(x)dx &\leq \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int\limits_a^b g(x)dx \\ m &\leq \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} \leq M \end{aligned}$$

Нека да означим $\mu = \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx}$. Тогава $m < \mu < M$ и:

$$\mu\int\limits_a^b g(x)dx = \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx}\int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$$

2. Нека $g(x) \leq 0$ в $[a,b]$. Вторият случай се доказва аналогично на първия.■

Следствие 26.1: Ако $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$, а $g(x)$ е интегруема и не сменя знака си, то съществува $\xi \in [a,b]$, такова че

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказателство:
Тъй като $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$, то $f(x)$ е интегруема в $[a,b]$. Тогава ако $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, то от предишната теорема получаваме, че съществува $\mu \in [m, M]$, такова че:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Но понеже $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$, то тя приема всички стойности между $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$ и $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, т.е. съществува $\xi \in [a,b]$, такова че $f(\xi) = \mu$ и така получихме:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x)dx. \blacksquare$$

Следствие 26.2: Ако $f(x)$ е непрекъсната в крайния затворен интервал $[a,b]$, то съществува поне 1 точка $\xi \in [a,b]$, такава че:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Това следствие е известно още под името Теоремата за средните стойности.

Доказателство:
Използваме предишното следствие като взимаме $g(x) = 1$ ($g(x)$ е интегруема в $(-\infty, +\infty)$ и $g(x)$ не сменя знака си в $(-\infty, +\infty)$), така получаваме:

$$\int\limits_a^b f(x)1dx = f(\xi) \int\limits_a^b 1dx = f(\xi)(b-a). \blacksquare$$

Следствие 26.3: Нека $f(x)$ е интегруема в $[a,b]$ и $x \in [a,b]$. Да означим $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Тогава $F(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$.

Доказателство:
Понеже $f(x)$ е интегруема в $[a,b]$ следователно $f(x)$ е и ограничена в $[a,b]$ т.е. съществува число K, такова че $|f(x)| \leq K$. Да фиксираме точка $x_0 \in [a,x]$ тогава получаваме:

$$F(x) - F(x_0) = \int\limits_a^x f(t)dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)dt = \int\limits_{x_0}^x f(t)dt = \mu(x - x_0), \qquad (1)$$

където $\mu \in [\inf\limits_{[a,b]} f(x), \sup\limits_{[a,b]} f(x)]$. Тъй като f(x) е ограничена следователно и μ е ограничена. Сега да сметнем границата при $x \to x_0$ на (1):

$$\lim_{h \to 0} F(x) - F(x_0) = \lim_{h \to 0} \mu(x - x_0) = \mu \lim_{h \to 0} x - x_0 = 0.\blacksquare$$