25.Свойства на определените интеграли. Интегриране на неравенства

Свойства на определените интеграли::

1. Ако $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ и $a < c < b$, то $f(x)$ е интегруема и в $[a, c]$(и в $[c, b]$).

   Доказателство:

2. Нека $f(x)$ е интегруема в $[a, c]$ и в $[c, b]$. Тогава $f(x)$ е интегруема в $[a, b]$ и
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

   Доказателство:

3. Нека $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в $[a, b]$. Тогава
$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

   Доказателство:

Твърдение 25.1: Нека $f(x)$ е интегруема в $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$. Тогава

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Доказателство:
Нека $\tau = [x_0, x_1, ..., x_n]$ е произволно разбиване на интервала $[a, b]$. Да разгледаме малките суми на Дарбу $s_\tau = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1})$. Тъй като $x_{k-1} < x_k$ и $f(x) \geq 0$, т.е. $\inf\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) \geq \inf f(x) \geq 0$, то получаваме $0 \leq s_tau$. Но понеже $s_\tau \leq I \leq S_\tau$, то получаваме $I \geq s_\tau \geq 0$. ■

Следствие 25.1: Нека $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в (a, b) и $f(x) \leq g(x)$ за всяко x. Тогава

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказателство:
Нека $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$, понеже $f(x) \leq g(x)$ за всяко x. Тогава по предната теорема имаме

$$0 \leq \int\limits_a^b h(x)dx = \int\limits_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b g(x)dx$$

И така получихме $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$. ■

Следствие 25.2: Нека $f(x)$ е интегруема в $[a, b]$ и $m \leq f(x) \leq M$. Тогава

$$m(b - a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

Доказателство:
Нека $g(x) = M \geq f(x)$. Тъй като доказахме, че всяка константна функция е интегруема, то тогава по предходното следствие получаваме

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx = M(b-a).$$

Нека $h(x) = m \leq f(x)$. Тъй като доказахме, че всяка константна функция е интегруема, то тогава по предходното следствие получаваме

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b h(x)dx = m(b-a). \quad \blacksquare$$

Твърдение 25.2: Нека $f(x)$ е интегруема в $[a,b]$. Тогава и $|f(x)|$ е интегруема в $[a,b]$ и

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$$

Доказателство:

1. Да докажем, че $|f(x)|$ е интегруема. Ако S_τ, s_τ са съответно голяма и малка сума на Дарбу за функцията $|f(x)|$, тогава ще докажем, че при произволно $\varepsilon > 0$ ще съществува разбиване τ, такова че разлика $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. Нека означим:

$$m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$$
$$M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$$
$$n_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} |f(x)|$$
$$N_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} |f(x)|$$

Знаем, че:

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$
$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Сега да разгледаме полученото неравенство в интервала $[x_{i-1}, x_i]$. Понеже

$$f(x) \leq \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = M_i \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \tag{1}$$

$$f(y) \geq \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = m_i \quad \forall y \in [x_{i-1}, x_i]$$

или като умножим двете страни на неравенство по -1:

$$-f(y) \leq -l_i \quad \forall y \in [x_{i-1}, x_i] \tag{2}$$

Като съберем неравенствата (1) и (2) получаваме:

$$f(x) - f(y) \leq M_i - m_i \quad \forall x, y \in [x_{i-1}, x_i] \tag{3}$$

Аналогично понеже $f(x) \geq m_i($ т.е. $-f(x) \leq -m_i)$ и $f(y) \leq M_i$ получаваме:

$$f(y) - f(x) \leq M_i - m_i \quad \forall x, y \in [x_{i-1}, x_i], \tag{4}$$

Така от (3), (4) и $M_i - m_i \geq 0$ ($M_i \geq m_i$) получаваме:

$$|f(x) - f(y)| \leq M_i - m_i \quad \forall x, y \in [x_{i-1}, x_i]$$

Така излиза, че:

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)| \leq M_i - m_i \qquad \forall x, y \in [x_{i-1}, x_i]$$

Тъй като това неравенство е изпълнено за всяко $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, то е изпълнено и за супремума на лявата страна, които аналогично на предишните сметки се доказва, че е:

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq N_i - n_i$$

И така за всеки интервал $[x_{i-1}, x_i]$ получаваме неравенството:

$$N_i - n_i \leq M_i - m_i.$$

Умножаваме двете страни на това неравенство по $(x_i - x_{i-1})$ и сумираме всички такива неравенства за i=1,2,...,n:

$$\sum_{i=1}^{n}(N_i - n_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

Преработваме малко неравенството:

$$\sum_{i=1}^{n} N_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Очевидно получаваме малките и големите суми на Дарбу. Нека да означим с $\tilde{S_\tau}, \tilde{s_\tau}$ съответно големите и малките суми на Дарбу за $|f(x)|$ и с S_τ, s_τ съответно големите и малките суми на Дарбу за $f(x)$ т.е.:

$$\tilde{S_\tau} = \sum_{i=1}^{n} N_i(x_i - x_{i-1})$$

$$\tilde{s_\tau} = \sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - x_{i-1})$$

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$\tilde{S_\tau} - \tilde{s_\tau} \leq S_\tau - s_\tau$$

Задаваме $\varepsilon > 0$. Понеже $f(x)$ е интегруема, то съществува такова деление τ, че $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. Тогава получава, че:

$$\tilde{S_\tau} - \tilde{s_\tau} \leq S_\tau - s_\tau < \varepsilon$$

Така доказахме, че $|f(x)|$ е интегруема.

2. Да докажем неравенството. Тъй като доказахме, че $|f(x)|$ е интегруема и знаем, че $f(x) \leq |f(x)|$, то тогава по следствие 25.1 получаваме:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx. \tag{5}$$

Аналогично $|f(x)|$ е интегруема и $-f(x) \leq |f(x)|$, то тогава по следствие 25.1 получаваме:

$$\int\limits_a^b [-f(x)]dx \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

т.е.

$$-\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx. \tag{6}$$

От (5) и (6) получихме

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$$

Твърдение 25.3: Нека $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в (a, b). Тогава и $f(x)g(x)$ е интегруема в (a, b).

Доказателство:
Нека τ е разбиване, такова че:

$$a_0 = x_0 < x_1 < ... < x_n$$

Понеже $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в $[a, b]$, то те са ограничени в $[a, b]$. Тогава съществуват M и L, такива че $|f(x)| \leq M$ и $|g(x)| \leq L$ в $[a, b]$.

Нека направим следните означения:

$$\begin{aligned}
m_i &= \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \\
M_i &= \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \\
l_i &= \inf_{[x_{i-1},x_i]} g(x) \\
L_i &= \sup_{[x_{i-1},x_i]} g(x) \\
n_i &= \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x)g(x) \\
N_i &= \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x)g(x).
\end{aligned}$$

Да разгледаме веригата от неравенства:

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| = \\
&= |f(x)(g(x) - g(y)) + (f(x) - f(y))g(y)| \leq \\
&\leq |f(x)(g(x) - g(y))| + |(f(x) - f(y))g(y)| \leq \\
&\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)||g(y)| \leq \\
&\leq M|g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)|L
\end{aligned}$$

В преобразуванията използваме неравенството на триъгълника и $|f(x)| \leq M$ и $|g(x)| \leq L$ в $[a, b]$. Сега да разгледаме полученото неравенство в интервала $[x_{i-1}, x_i]$. Понеже

$$g(x) \leq \sup_{[x_{i-1},x_i]} g(x) = L_i \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \tag{7}$$

и

$$g(y) \geq \inf_{[x_{i-1},x_i]} g(y) = l_i \quad \forall y \in [x_{i-1}, x_i]$$

или като умножим двете страни на неравенство по -1:

$$-g(y) \leq -l_i \quad \forall y \in [x_{i-1}, x_i] \tag{8}$$

Като съберем неравенствата (7) и (8) получаваме:

$$g(x) - g(y) \leq L_i - l_i \quad \forall x, y \in [x_{i-1}, x_i] \tag{9}$$

Аналогично понеже $g(x) \geq l_i($ т.е. $-g(x) \leq -l_i)$ и $g(y) \leq L_i$ получаваме:

$$g(y) - g(x) \leq L_i - l_i \quad \forall x, y \in [x_{i-1}, x_i], \tag{10}$$

Така от (9), (10) и $L_i - l_i \geq 0$ ($L_i \geq l_i$) получаваме:

$$|g(x) - g(y)| \leq L_i - l_i \quad \forall x, y \in [x_{i-1}, x_i]$$

По същия начин получаваме:

$$|f(x) - f(y)| \leq M_i - m_i \quad \forall x, y \in [x_{i-1}, x_i]$$

Така излиза, че:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq M|g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)|L \leq \\ \leq M(L_i - l_i) + L(M_i - m_i) \quad \forall x, y \in [x_{i-1}, x_i] \end{aligned}$$

Тъй като това неравенство е изпълнено за всяко $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, то е изпълнено и за супремума на лявата страна, които аналогично на предишните сметки се доказва, че е:

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq N_i - n_i$$

И така за всеки интервал $[x_{i-1}, x_i]$ получаваме неравенството:

$$N_i - n_i \leq M(L_i - l_i) + L(M_i - m_i).$$

Умножаваме двете страни на това неравенство по $(x_i - x_{i-1})$ и сумираме всички такива неравенства за i=1,2,...,n:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(N_i - n_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n}\left[M(L_i - l_i)(x_i - x_{i-1}) + L(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})\right] = \\ = M\sum_{i=1}^{n}(L_i - l_i)(x_i - x_{i-1}) + L\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

Преработваме малко неравенствата:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} N_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - x_{i-1}) \leq M\left[\sum_{i=1}^{n} L_i(x_i - x_{i-1})) - \sum_{i=1}^{n} l_i(x_i - x_{i-1})\right] + \\ + L\left[\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})\right] \end{aligned}$$

Очевидно получаваме малките и големите суми на Дарбу за f(x),g(x) и f(x).g(x):

$$S_{fg}^{\tau} - s_{fg}^{\tau} \leq M[S_g^{\tau} - s_g^{\tau}] + L[S_f^{\tau} - s_f^{\tau}]$$

Задаваме $\varepsilon > 0$, избираме τ, такова че $S_g^{\tau} - s_g^{\tau} < \frac{\varepsilon}{L+M}$ и $S_f^{\tau} - s_f^{\tau} < \frac{\varepsilon}{L+M}$. Тогава получава, че:

$$S_{fg}^{\tau} - s_{fg}^{\tau} \leq M[S_g^{\tau} - s_g^{\tau}] + L[S_f^{\tau} - s_f^{\tau}] < M\frac{\varepsilon}{L+M} + L\frac{\varepsilon}{L+M} < \varepsilon$$

Така доказахме, че $f(x)g(x)$ е интегруема. ■