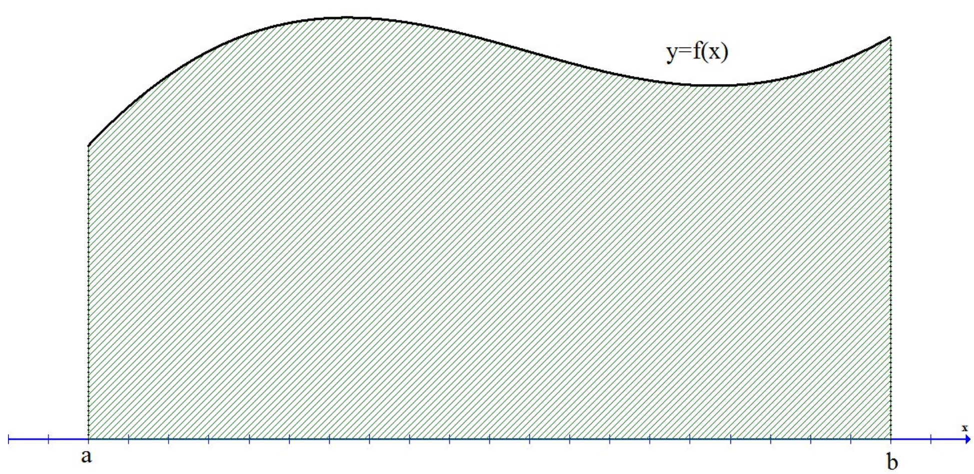
24.Определен интеграл. Дефиниции на Дарбу и Риман. Критерий на Дарбу за интегруемост

Нека да разгледаме една неотрицателна функция $f(x)$, дефинирана в крайния затворен интервал $[a, b]$. Нека тя е и ограничена в този интервал. Да начертаем нейната графика:



Искаме да намерим площта между графиката на функцията и абцисната ос в интервала $[a, b]$. Имам впредвид защрихованата площ. За целта първо трябва да дефинираме малко понятия:

Определение 24.1: Разбиране (деление) τ на интервала $[a, b]$ се нарича система от точки $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, такива че:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

Това означава да разделим интервала $[a, b]$ на n подинтервала:

$$[a, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, b],$$

като дължината на интервала i(бележим с Δx_i) е $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Определение 24.2: Големина на разбиването(диаметър на разбиването) наричаме дължината на най-дългия интервал т.е. $\delta_\tau = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$.

Определение 24.3: Казваме, че делението $\tau_1 = \{x_i\}_{i=0}^n$ е по-фино(подребно) от делението $\tau_2 = \{y_i\}_{i=0}^n$(или делението τ_1 следва делението τ_2), ако всички точки y_i са точки от делението τ_1. Бележим $\tau_1 \succ \tau_2$ (Да не се чудите за посоката на знака - тъй като τ_1 има повече точки от τ, то посоката е $\succ$)

Определение 24.4: Нека е дадено разбиване $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n$ и

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Тогава набор от точки, отговарящ на разбиването τ, ще наричаме системата от точки $\zeta = \{\zeta_i\}_{i=0}^n$, такива че $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ за $i = 1, 2, ..., n$.
Простичко набор от точки е да вземем от всеки подинтервал

$$[a, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, b],$$

по една точка ζ_i.

И сега да се завърнем на нашата задача. Да намерим лицето на фигурата. За целта ще вземем някакво разбиване τ на интервала $[a, b]$. Означаваме:

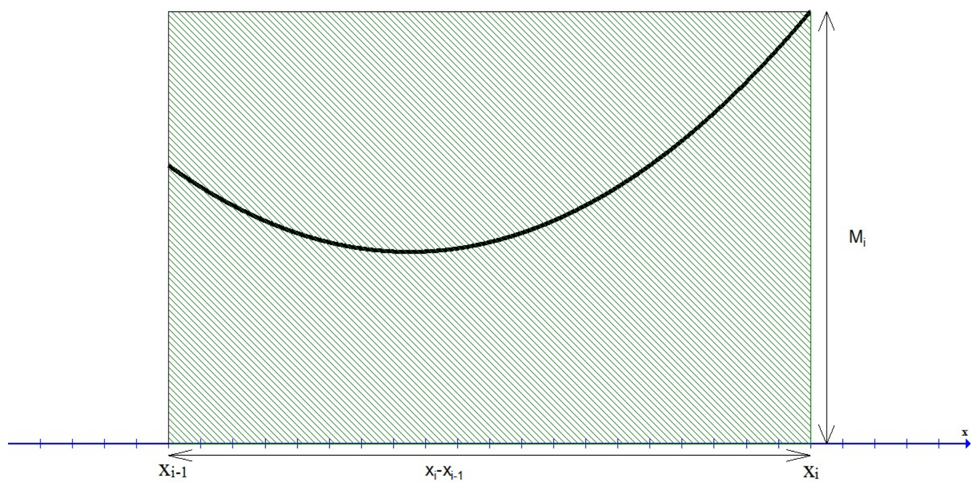
$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$$
$$M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Тъй като функцията е ограничена върху $[a, b]$, то тя е ограничена и върху $[x_{i-1}, x_i]$, то значи достига и инфинимума и суперемума си върху всеки от подинтервалите. Да образуваме сумите:

$$s = \sum_{i=0}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$S = \sum_{i=0}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Тези суми се наричат съответно малка и голяма сума на Дарбу. Всяка една от тези суми може да бъде изтълкувана геометрично. Всяко едно събираемо от голямата сума на Дарбу може да бъде изтълкувано като лице на правоъгълник.

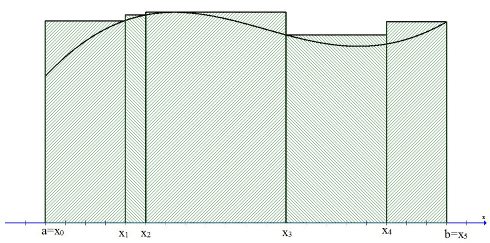


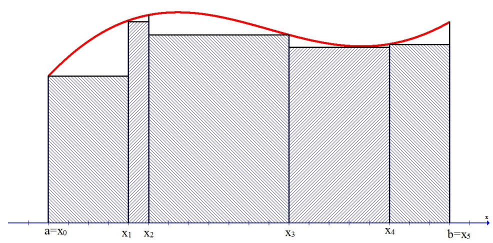
Ясно е, че лицето на правоъгълника е по-голямо от тази част от лицето на фигурата. Така цялостното тълкуване на голямата сума на Дарбу S - лицето на многоъгълник, който е с по-голямо лице от нашата фигура, и междудругото е описан около нея. Аналогично се достига до извода, че малката сума на Дарбу представлява лицето s на многоъгълник, чиято площ е по-малка от тази, която търсим.

Пример 24.1: За по-нагледно да разгледаме разбиване с 5 точки:

$$[a, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_4], [x_4, b],$$

След което да намерим супремума и инфинимума на функцията във всеки един от подинтервалите и да начертаем геометричната интерпретация на голямата и малаката сума на Дарбу:

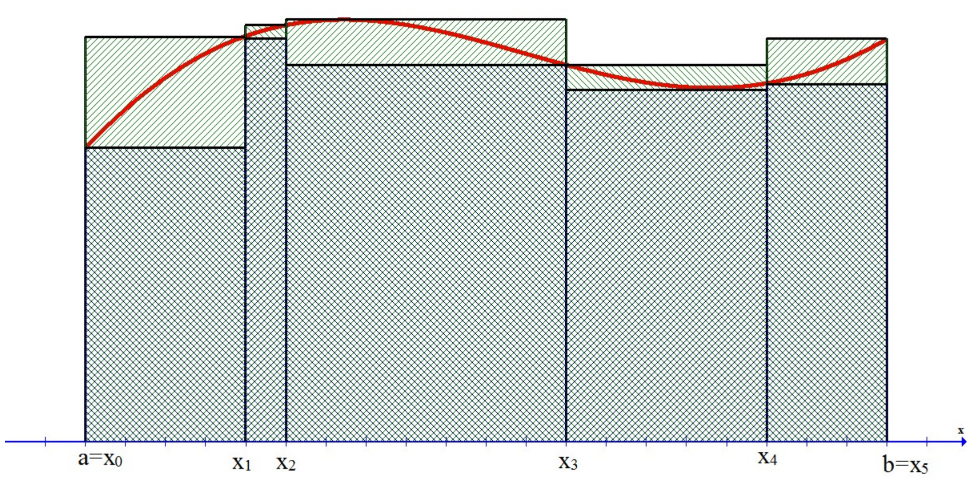




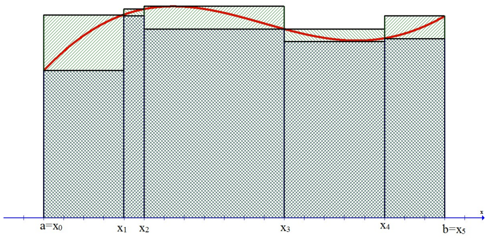
Ако работим с едно и също разделяне на интервала на подинтервали е ясно, че:

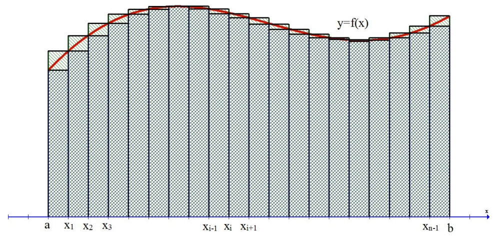
$$s = \sum_{i=0}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=0}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = S$$

от формулировката за малка и голяма сума на Дарбу. Но да се върнем на нашата задача да намерим лицето I на фигурата. Но какво тази размисли ни помагат да се доближим до това лице? Ясно е, че ако I съществува(въобще не ясно дали въобше съществува лице за всички фигури), то това големината на това лице би трябвало да се намира между големините на лицата на вписаната и описаната фигура т.е. $s \leq I \leq S$:



Което по-какъв начин ни помога? Еми изглежда логично при издребняване на делението лицето на описания многогоъгълник намалява, а лицето на вписания многоъгълник се увеличава и тъй като имаме неравенството $s \leq I \leq S$, то би трябвало да достигнем до I при много много малки подинтервалчета. Вижте изображенията:





А сега лека-полека и на малки стъпки да докажем това. Първата стъпка към тази цел е да докажем, че с издребняването на делението големите суми на Дарбу намаляват, а малките суми на Дарбу растат. Ще докажем само големите суми на Дарбу намаляват, но нека първо да формулираме твърдението формално:

Твърдение 24.1: Нека $\tau' \succ \tau$, следователно $S_\tau \geq S_{\tau'}$.

Доказателство:
Нека $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ и

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Ще направим индукция по брой на точките, които принадлежат на τ', но не принадлежат на τ.

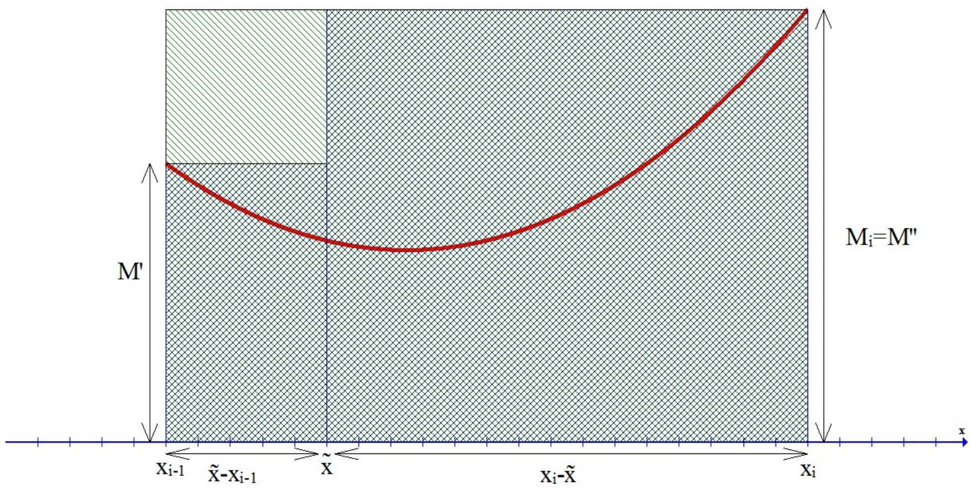
1. Нека τ' има точно една точка повече от τ и:

   $$\tau' = [x_0, x_1, ..., x_k, \tilde{x}, x_{k+1}, ..., x_n]$$

   Нека:

   $$S_\tau = \sum_{i=0}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

   Нека $\tau' = \{y_i\}_{i=1}^{n+1}$, а голямата сума на Дарбу е $S_{\tau'} = \sum\limits_{i=0}^{k} N_i(y_i - y_{i-1})$. Тъй като сме добавили само една точка, то ще има промяна единствено в интервала $[x_k, x_{k+1}]$. Виж картинката:



,

то всички други членове на голямата сума на Дарбу ще са същите при разбиване τ и τ' с изключение на тези членове, които се отнасят за интервала $[x_k, x_{k+1}]$. Както се вижда от картинката $M_k \geq M'_k, M''_k(\, -M_k \leq -M'_k, \, -M_k \leq -M''_k)$ Това значи, че:

$$\begin{aligned} S_\tau - S_{\tau'} &= M_k(x_{k+1} - x_k) - [M'_k(\tilde{x} - x_k) + M''_k(x_{k+1} - \tilde{x})] = \\ &= M_k(x_{k+1} - x_k) - M'_k(\tilde{x} - x_k) - M''_k(x_{k+1} - \tilde{x}) = \\ &= M_k(x_{k+1} - x_k) - M_k(\tilde{x} - x_k) - M_k(x_{k+1} - \tilde{x}) = 0 \end{aligned}$$

Така получхме, че $S_\tau \geq S_{\tau'}$.

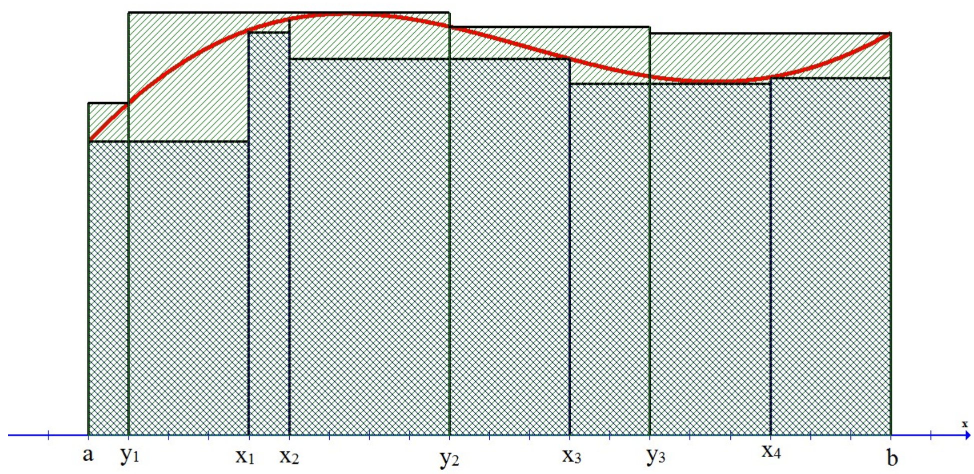
2. Нека индукционното преположение е изпълнено за всички набори от k точки, които принадлежат на τ', но не принадлежат на τ. Трябва да го докажем за произволен набор от $k+1$ точки. Тъй като произволен набор от $k+1$ точки може да се получи от набор от k точки с добавянето на 1 точка. Но ние вече доказахме, че като добавим една точка е изпълнено $S_\tau \geq S_{\tau'}$. С това завършихме теоремата.■

Твърдение 24.2: Нека $\tau' \succ \tau$, следователно $s_\tau \leq s_{\tau'}$.

Доказателство:
Аналогично на предходното твърдение.

Като следствие от предходните две твърдения ще докажем, че без значение от разбиването на интервала $[a, b]$ лицето на вписания във фигурата многоъгълник е по-малко от лицето на описания около фигурата многоъгълник.

Пример 24.2: Да вземем една функция и да начертаем графиката. Нека сме взели 2 различни разбивания $\tau_1 = \{x_i\}_{i=0}^5$ и $\tau_2 = \{y_i\}_{i=0}^4$. Като разбиването τ_1 ще го използваме за постояването на малките суми на Дарбу, а разбиването τ_1 - за големите суми на Дарбу. Виж картинката:



А сега след като видяхме, че това изглежда логично да запишем формално следствието и да го докажем:

Следствие 24.1: Нека τ и τ' са две различни разбивания на интервала $[a, b]$. Тогава $s_\tau \leq S_{\tau'}$.

Доказателство:
Да въведем ново разбиване τ_1, което е такова че $\tau_1 = \tau \cup \tau'$ т.е. τ_1 съдържа всички точки от разбиването τ и всички точки от разбиването τ'. Ясно е, че $s_{\tau_1} \leq S_{\tau_1}$. Понеже τ_1 е по-дребно деление от τ, то тогава $s_{\tau_1} \geq s_\tau$ от **Твърдение 2**. Тъй като τ' е по-дребно деление от τ, то тогава $S_{\tau_1} \leq S_{\tau'}$ от **Твърдение 1**. Така получихме веригата неравенства:

$$s_\tau \leq s_{\tau_1} \leq S_{\tau_1} \leq S_{\tau'}$$

Така получихме, че $s_\tau \leq S_{\tau'}$ без значение от делението. ■

Определение 24.5: Нека $f(x)$ е ограничена функция в интервала $[a, b]$. Ще казваме, че $f(x)$ е интегруема в интервала , ако $\underline{I} = \overline{I}$. Числото $\underline{I} = \overline{I} = I$ се нарича определен интеграл на $f(x)$ в интервала $[a, b]$ и ще го бележим така $\int\limits_a^b f(x)dx$ Числото a се нарича долна граница, а числото b- горна граница.

Теорема 24.1 (на Дарбу) : Нека $f(x)$ е дефинирана и ограничена върху $[a, b]$. $f(x)$ е интегруема върху $[a, b] \Longleftrightarrow$ за всяко $\varepsilon > 0$, съществува разбиване $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n$, такова че $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$.

Доказателство:

1. Нека $f(x)$ е интегруема, то тогава ще докажем, че за всяко $\varepsilon > 0$, съществува разбиване $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n$, такова $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$.

   Задаваме $\varepsilon > 0$. Понеже $f(x)$ е интегруема, то $\underline{I} = \overline{I} = I$, но $\underline{I} = \sup s_\tau$. Понеже I е най-малката горна граница за s_τ, то тогава $I - \frac{\varepsilon}{2}$ не е горна граница за s_τ следователно съществува по-дребно разбиване τ_1, такова че $s_{\tau_1} > I - \frac{\varepsilon}{2}$. Аналогично $f(x)$ е интегруема, то $\underline{I} = \overline{I} = I$, но $= \overline{I} = \inf S_\tau$. Понеже I е най-голямата долна граница за s_τ, то тогава $I + \frac{\varepsilon}{2}$ не е долна граница за s_τ следователно съществува по-дребно разбиване τ_2, такова че $s_{\tau_2} < I + \frac{\varepsilon}{2}$. Нека да разгледаме разбиване $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$. Тъй като $\tau \succ \tau_1$, то тогава $s_\tau \geq s_{\tau_1}$ Но вече показахме, че $s_{\tau_1} > I - \frac{\varepsilon}{2}$ и така получихме:

   $$s_\tau > I - \frac{\varepsilon}{2}$$

   като умножим 2-те страни на неравенството по (-1) получаваме:

   $$-s_\tau < -I + \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

   Аналогично $\tau \succ \tau_2$, то тогава $S_\tau \leq S_{\tau_2}$. Но вече показахме, че $S_{\tau_2} < I + \frac{\varepsilon}{2}$ и така получихме:

   $$S_\tau < I + \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

И като съберем 1 и 2 получаваме:

$$S_\tau - s_\tau \leq I + \frac{\varepsilon}{2} - I + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. Нека за всяко $\varepsilon > 0$, съществува разбиване $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n$, такова че $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$, тогава ще докажем, че $f(x)$ е интегруема.

Да допуснем, че $f(x)$ не е интегруема. Това означава, че $\overline{I} - \underline{I} > 0$. Тогава нека да зададем $\varepsilon = \frac{\overline{I} - \underline{I}}{2}$. Тогава трябва да съществува разбиване τ, такова че $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. Вече доказахме неравенствата:

$$s_\tau < \underline{I} < \overline{I} < S_\tau$$

т.е. $s_\tau < \underline{I}$ ($-s_\tau > -\underline{I}$) и $\overline{I} < S_\tau$. Събираме двете неравенства и получаваме:

$$S_\tau - s_\tau > \overline{I} - \underline{I} = 2\varepsilon$$

Но ние получихме $2\varepsilon < S_\tau - s_\tau < \varepsilon$, т.е. $2\varepsilon < \varepsilon$, което означава $\varepsilon < 0$. Достигнахме до противоречие с $\varepsilon > 0$. Така достигнахме до извода, че $f(x)$ не е интегруема. ■