22.Примитивна функция. Неопределен интеграл. Интегриране по части. Смяна на променливата

Определение 22.1: Нека е дадена функцията $f(x)$, дефинирана в интервала $\triangle$. Ще казваме, че функцията $F(x)$, дефинирана в $\triangle$, е примитивна функция на $f(x)$, ако $F(x)$ е диференцируема в $\triangle$ и $F'(x) = f(x)$.

Т.е. ние търсим функция $F(x)$, такава че $F'(x) = f(x)$, като $f(x)$ е известна функция.

Пример 22.1: Да намерим примитивната на функцията $f(x) = 2x$. Трябва да досетим, че функцията $F(x) = x^2$ е примитивна на $f(x) = 2x$ в интервала $(-\infty, +\infty)$, защото $(F(x))' = (x^2)' = 2x = f(x)$. Както се досещате предполагам, че трудната част е досещането.

Твърдение 22.1: Ако $F(x)$ е примитивна на $f(x)$ в интервала $\triangle$, то всички примитивни на $f(x)$ имат вида $F(x) + c$, където c е някаква константа.

Доказателство:

1. Ако $F(x)$ е примитивна на $f(x)$, то $F(x) + c$ също е примитивна на $f(x)$.
$$(F(x) + c)' = F'(x) + (c)' = F'(x) = f(x)$$

2. Ако $\varPhi(x)$ е примитивна на $f(x)$, то $\varPhi(x) = F(x) + c$.
$$(\varPhi(x) - F(x))' = \varPhi(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Понеже имаме, че $(\Phi(x) - F(x))' = 0$, то от основна теорема на интегралното смятане получаваме, че $\Phi(x) - F(x) = c$ т.е. $\Phi(x) = F(x) + c$. ■

Определение 22.2: Множеството от всички примитивни $\Phi(x) = F(x) + C$ на функцията f(x) в интервала $\triangle$ се нарича неопределен интеграл от функцията $f(x)$ в интервала $\triangle$ и се означава $\Phi(x) = \int f(x)dx$.

Важни термини са следните:

1. Знакът $\int$ се нарича интегрален знак
2. Функцията $f(x)$ се нарича подинтегрална функция
3. Да напомня, че dx се нарича диференциал.
4. Намирането на примитивните функции на дадена функция $f(x)$ се нарича интегриране

Свойства на неопределените интеграли:

1. $[\int f(x)dx + C]' = f(x)$

   Доказателство:
   От определението за неопределен интеграл имаме, че $\int f(x)dx = F(x) + c$. Сега просто трябва да диференцираме:

   $$\left[\int f(x)dx\right]' = [F(x) + c]' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$$

   Трябва само да не забравяме, че $F(x)$ е примитивна на $f(x)$, затова и $F'(x) = f(x)$. ■

2. $\int F'(x)dx = F(x) + C$

Доказателство:
Нека $F(x)$ е примитивната на $f(x)$. Тогава имаме, че $F'(x) = f(x)$ и $\int f(x) = F(x) + C$. Така получаваме веригата от равенства:

$$\int F'(x)dx = \int f(x) = F(x) + C$$

С това доказателството завърши. ■

3. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx + C$

Доказателство:
Ще докажем, че

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + C.$$

Аналогично се доказва и

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx + C$$

Нека $F(x)$ и $G(x)$ са примитивните на съответно на $f(x)$ и $g(x)$ т.е. $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$. Тогава имаме, че $[F(x) + G(x)]' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$, но

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = F(x) + G(x) + c$$

Понеже знаем, че $\int f(x)dx = F(x) + c_1$ и $\int g(x)dx = G(x) + c_2$. Тогава получаваме:

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = F(x) + G(x) + c = (F(x) + c_1) + (G(x) + c_2) + \\ + c - c_1 - c_2 = \int f(x)dx + \int g(x)dx + C,$$

където $C = c - c_1 - c_2$. ■

4. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx + C$

Доказателство:

Нека $F(x)$ е примитивна на $f(x)$. Тогава $[\alpha F(x)]' = \alpha[F(x)]' = \alpha f(x)$. Сега да пресметнем:

$$\int \alpha f(x)dx = \int [\alpha F(x)]'dx = \alpha F(x) + C$$

и с това приключихме доказателството. ■

Таблица на основните интеграли

1. $\int 0dx = C$
2. $\int 1dx = x + C$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ при $\alpha \neq -1$
4. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
5. $\int e^x dx = e^x + C$
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$
10. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{cotg} x + C$
11. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x) + C \\ -\operatorname{arccotg}(x) + C \end{cases}$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} \arcsin(x) + C \\ -\arccos(x) + C \end{cases}$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C$
14. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

Доказателство:

1. $\int 0dx = C$

   Понеже $(C)' = 0$, то $\int 0dx = C$.

2. $\int 1dx = x + C$

   Понеже $(x + C)' = x' + C' = 1$, то $\int 1dx = x + C$.

3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ при $\alpha \neq -1$

   При $\alpha \neq -1$ имаме, че
   $$\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right]' = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]' + C' = (\alpha+1)\frac{x^\alpha}{\alpha+1} + 0 = x^\alpha$$
   Така получихме, че:
   $$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$
   при $\alpha \neq -1$.

4. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

   Понеже $\ln|x|$ е дефиниран при $x \neq 0$. Ще разгледаме 2 случая:

   (а) При $x > 0$ получаваме, че:
   $$[\ln|x| + C]' = [\ln(x) + C]' = (\ln(x))' + C' = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}$$

   (б) При $x < 0$ получаваме, че:
   $$[\ln|x| + C]' = [\ln(-x) + C]' = (\ln(-x))' + C' = \frac{1}{-x}(-1) + 0 = \frac{1}{x}$$

   Така получихме, че при $x \neq 0$ имаме, че $(\ln|x| + C)' = \frac{1}{x}$ т.е.
   $$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C.$$

5. $\int e^x dx = e^x + C$

Понеже

$$[e^x + C]' = [e^x]' + C' = e^x + 0 = e^x$$

Така получихме, че:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Понеже

$$\left[\frac{a^x}{\ln a} + C\right]' = \left[\frac{a^x}{\ln a}\right]' + C' = \frac{1}{\ln a}[a^x]' + 0 = \frac{1}{\ln a} a^x \ln a = a^x$$

Така получихме, че:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

Понеже

$$[-\cos x + C]' = -[\cos x]' + C' = -(-\sin x) = \sin x$$

Така получихме, че:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

Понеже

$$[\sin x + C]' = [\sin x]' + C' = \cos x$$

Така получихме, че:

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$

Понеже

$$[\operatorname{tg} x + C]' = [\operatorname{tg} x]' + C' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Така получихме, че:

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$

 Понеже

$$[-\operatorname{cotg} x + C]' = [-\operatorname{cotg} x]' + C' = -\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Така получихме, че:

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

11. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x) + C \\ -\operatorname{arccotg}(x) + C \end{cases}$

 (а) Понеже

 $$[\operatorname{arctg} x + C]' = [\operatorname{arctg} x]' + C' = \frac{1}{1+x^2}$$

 Така получихме, че:

 $$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

 (б) Понеже

 $$[-\operatorname{arccotg} x + C]' = -[\operatorname{arccotg} x]' + C' = -\frac{1}{1+x^2}$$

 Така получихме, че:

 $$\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\operatorname{arccotg} x + C$$

т.е. получихме това, което трябваше:

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x) + C \\ -\operatorname{arccotg}(x) + C \end{cases}$$

12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} \arcsin(x) + C \\ -\arccos(x) + C \end{cases}$

    (а) Понеже

    $$[\arcsin x + C]' = [\arcsin x]' + C' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

    Така получихме, че:

    $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$$

    (б) Понеже

    $$[-\arccos x + C]' = -[\arccos x]' + C' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

    Така получихме, че:

    $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\arccos x + C$$

т.е. получихме това, което трябваше:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} \arcsin(x) + C \\ -\arccos(x) + C \end{cases}$$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C$

Нека $F(x) = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C$. Допустимото множество е всяко $x \in \mathbb{R}$. Ще покажем, че $x + \sqrt{x^2+1} \geq 0$ за всяко x. Ясно е, че $x + \sqrt{x^2+1} \geq 0 \iff \sqrt{x^2+1} \geq -x$.

(а) Очевидно е, че това неравенство е изпълнено за всяко $x \geq 0$

(б) При $x < 0$ получаваме системата:

$$\begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 1 \geq x^2 \end{cases}$$

От където получаваме $x < 0$.

Така получихме, че $x + \sqrt{x^2+1} \geq 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Сега остава да сметнем една производна:

$$\begin{aligned} F'(x) &= (\ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C)' = (\ln(x + \sqrt{x^2+1}))' + (C)' = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}(1 + \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}(2x)) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

И така получихме:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C$$

14. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

Нека $F(x) = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$. Допустимото множество е $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

(а) При $x > 1$ е изпълнено $x + \sqrt{x^2-1} > 1 > 0$. Тогава

$$F'(x) = (\ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C)' = (\ln(x + \sqrt{x^2-1}))' + (C)' =$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}(1 + \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}(2x)) =$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

И така получихме при $x > 1$ е изпълнено:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$$

(б) При $x < -1 \Longrightarrow x^2 - 1 < x^2 \Longrightarrow \sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} = |x| = -x$ т.е. получаваме, че $x + \sqrt{x^2-1} < 0$. Тогава

$$F'(x) = (\ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C)' = (\ln(-(x + \sqrt{x^2-1})))' + (C)' =$$
$$= (\ln(-x - \sqrt{x^2-1}))' = \frac{1}{-x-\sqrt{x^2-1}}(-1 - \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}(2x)) =$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

И така получихме, че е в сила:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$$

С това завърши доказателството на основните формули. ■

Внасяне под знака на диференциала

Теорема 22.1: Нека $F(x)$ е примитивна на $f(x)$ т.е. $[F(x)]' = f(x)$ и $\int f(x)dx = F(x) + C$. Ще докажем, че

$$\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказателство:

1. Ще намерим производната на $F(\varphi(t)) + C$ спрямо t:

   $$[F(\varphi(t)) + C]'_t = [F(\varphi(t))]'_{\varphi(t)}[\varphi(t)]'_t = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

   Това което получихме, всъщност означава, че $F(\varphi(t)) + C$ е примитивна на функцията $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, т.е.

   $$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C. \tag{1}$$

2. Ще намерим производната на $F(\varphi(t)) + C$ спрямо $\varphi(t)$. За да стане по-лесно полагаме $q = \varphi(t)$:

   $$[F(\varphi(t)) + C]'_{\varphi}(t) = [F(\varphi(t))]'_{\varphi(t)} + C' = [F(q)]'_q + 0 = f(q) = f(\varphi(t))$$

   Това което получихме, всъщност означава, че $F(\varphi(t)) + C$ е примитивна на функцията $f(\varphi(t))$ спрямо $\varphi(t)$, т.е.

   $$\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C. \tag{2}$$

От (1) и (2) получаваме:

$$\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\blacksquare$$

Както забелязвате от теоремата внасянето на част от подинтегралната функция под знака на диференциала е мислено интегриране на тази част спрямо променливата или функцията, които са под знака на диференциала, и записването им под него.

Следствие 22.1: Нека $\varphi(x)$ е диференцируема функция, тогава

$$\int f(x)\varphi'(x)dx = \int f(x)d(\varphi(x) + C)$$

.

Доказателство:
Нека да положим $g(x) = \varphi(x) + C$. От теоремата знаем, че

$$\int f(x)d(\varphi(x) + C) = \int f(x)d(g(x)) = \int f(x)g'(x)dx =$$
$$= \int f(x)(\varphi(x) + C)'dx = \int f(x)\varphi'(x)dx \blacksquare$$

На прост език това следствие значи, че можем безнаказано да добавяме произволна константа под знака на диференциала.

Следствие 22.2: Нека $\varphi(x)$ е диференцируема функция, тогава

$$k\int f(x)d\varphi(x) = \int kf(x)d\varphi(x) = \int f(x)dk\varphi(x)$$

.

Доказателство:
Нека да положим $g(x) = k\varphi(x)$. От теоремата знаем, че

$$\int f(x)d(k\varphi(x)) = \int f(x)d(g(x)) = \int f(x)g'(x)dx =$$
$$= \int f(x)(k\varphi(x))'dx = \int kf(x)\varphi'(x)dx =$$
$$= \int kf(x)d\varphi(x) = k\int f(x)d\varphi(x).$$

Последното следва от по-рано изведените свойства за неопределените интеграли.$\blacksquare$

На прост език това следствие значи, че можем да си местим константа, която умножена по интеграла, в подинтегралната функция и поддиференциалната функция.

Пример 22.2: Да пресметнем интеграла $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$ при $a \neq 0$.

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}d\left(\frac{x}{a}\right)$$

Нека положим $\frac{x}{a} = t$. Тогава получаваме:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+t^2}dt \stackrel{(11)}{=} \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(t) + C =$$
$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Пример 22.3: Да пресметнем интеграла $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ при $a > 0$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}d\left(\frac{x}{a}\right)$$

Нека положим $\frac{x}{a} = t$. Тогава получаваме:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}d\left(\frac{x}{a}\right) = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \stackrel{(12)}{=}$$
$$\stackrel{(12)}{=} \frac{1}{a}\arcsin(t) + C = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Пример 22.4: Да пресметнем интеграла $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a}}dx$ при $a > 0$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a}}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2-1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2}}d\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$$

Нека положим $\frac{x}{\sqrt{a}} = t$. Тогава получаваме:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2}}d\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) = \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt \stackrel{(14)}{=}$$
$$\stackrel{(14)}{=} \ln|t+\sqrt{t^2-1}| + C = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{a}} + \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2-1}\right| + C$$
$$= \ln\left|\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{x^2-a^2}\right| + C = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{a}}\right| + C$$
$$= \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| - \ln\sqrt{a} + C = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C'$$

, където $C' = -\ln\sqrt{a} + C$.

Интегриране чрез смяна на променливата

Теорема 22.2: Нека за някакъв интервал D имаме:

$$\int f(x)dx,$$

който не можем да сметнем. Ако $\varphi(t)$ е диференцируема и обратима функция, дефинирана в D_1, като стойностите и принадлежат на интервала D и в интервала D_1 , тогава може да направим смяната $x = \varphi(t)$ и получаваме интеграла:

$$\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(t) + C,$$

който нека е възможно да бъде пресметнат. Тогава за изходния интеграл получаваме:

$$\int f(x)dx = F(\varphi^{-1}(x)) + C$$

На прост език ако ни е трудно да решим директно $\int f(x)dx$, но забележим някаква смяна на променливата от вида $\varphi(t) = x$ (заменим всяко срещане на x с функцията $\varphi(t)$) и така след смяната успеем да сметнем интеграла т.е. получаваме $F(t)$, то за да получим интеграла на началната функция (който и търсим) трябва просто да заместим t с $\varphi^{-1}(x)$, т.е обратната функция на тази, с която сме заместили в началото.

Доказателство:
За да докажем, че:

$$\int f(x)dx = F(\varphi^{-1}(x)) + C$$

трябва просто да сметнем производната на $F(\varphi^{-1}(x))+C$ спрямо x, което на думи звучи просто, но всъщност не е чак толкова просто колкото си мислите:

$$(F(\varphi^{-1}(x)) + C)' = F'(\varphi^{-1}(x))'_{\varphi^{-1}(x)}(\varphi^{-1}(x))'_x \quad (\star)$$

Сега нека да сметнем проиводните на множителите по-отделно. От условието изнасяме $\varphi(t)$ изпод знака на диференциала и получаваме:

$$F(t) + C = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

което означава, че $F(t)$ е примитивна на $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ т.е.

$$F'_t(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

и така получаваме:

$$F'_{\varphi^{-1}(x)}(\varphi^{-1}(x)) = f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))[\varphi(\varphi^{-1}(x))]'_{\varphi^{-1}(x)} = f(x)\varphi'(\varphi^{-1}(x)) \quad (\star\star)$$

Сега за да намерим производната на 2рия множител трябва да диференцираме двете страни на равенството $\varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$:

$$\begin{aligned}
\varphi(\varphi^{-1}(x)) &= x \\
\Big[\varphi(\varphi^{-1}(x))\Big]'_x &= \Big[x\Big]'_x \\
\Big[\varphi(\varphi^{-1}(x))\Big]'_{\varphi^{-1}(x)}\Big[\varphi^{-1}(x)\Big]'_x &= 1 \\
\varphi'(\varphi^{-1}(x))\Big[\varphi^{-1}(x)\Big]'_x &= 1 \\
\Rightarrow \Big[\varphi^{-1}(x)\Big]'_x &= \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \quad (\star\star\star)
\end{aligned}$$

От $(\star)$,$(\star\star)$ и $(\star\star\star)$ получаваме:

$$\begin{aligned}
(F(\varphi^{-1}(x)) + C)' &= F'(\varphi^{-1}(x))'_{\varphi^{-1}(x)}(\varphi^{-1}(x))'_x = \\
&= f(x)\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x)
\end{aligned}$$

и така получихме, че:

$$\int f(x)dx = F(\varphi^{-1}(x)) + C. \qquad \blacksquare$$

Пример 22.5: Да пресметнем интеграла:

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx$$

в интервала $(-a, a)$, където $a > 0$. Ще го сметнем като сменим променливата $x = a\sin(t)$, което означава $\frac{x}{a} = \sin(t)$ и функцията $t = \arcsin(\frac{x}{a})$

трябва да е обратима, то трябва да наложим ограничението $t \in \Big[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\Big]$.
Сега остава да сменим променливата:

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int \sqrt{a^2 - (a\sin t)^2}d(a\sin t) =$$
$$= \int |a|\sqrt{1-\sin^2 t}(a\cos t)dt = a^2 \int |\cos t|\cos t dt$$

Понеже $t \in \Big[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\Big]$, то тогава $|\cos t| = cost$. Така за подинтегралната функция получаваме $\cos^2 t$. Но от формулите за понижаване на степента знаем, че:

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$$

и така за интеграла получаваме:

$$I = a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \frac{a^2}{2}\int 1dt + \frac{a^2}{2}\int \cos(2t)dt + C =$$
$$= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4}\int \cos(2t)d(2t) + D = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2\sin(2t)}{4} + E$$

Сега остава единствено да не забравим да се върнем към изходната променлива и за тази цел трябва да заместим $t = \arcsin(\frac{x}{a})$ (или $\sin t = \frac{x}{a}$). Което от своя страна ще стане по-лесно, ако разпишем $\sin(2t) = 2\sin t\cos t = 2\sin t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t}$

$$I = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2 2\sin t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}}{4} + E = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2 x\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}{2a} + E =$$
$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2 x\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2} + E = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + E$$

Интегриране по части

Теорема 22.3: Нека $u(x)$ и $v(x)$ са 2 функции, които са диференцируеми в интервала D. Тогава е в сила формулата:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

Доказателство:
Понеже $u(x)$ и $v(x)$ са 2 диференцируеми функции, то

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x),$$

което означава, че $u(x)v(x)$ е примитивната на $u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$ т.е.

$$\begin{aligned} u(x)v(x) &= \int [u(x)v(x)]'dx = \int [u'(x)v(x) + v'(x)u(x)]dx = \\ &= \int u'(x)v(x)dx + \int v'(x)u(x)dx = \int v(x)du(x) + \int u(x)dv(x), \end{aligned}$$

от където стигаме до извода, че:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x). \qquad \blacksquare$$

Пример 22.6: Да пресметнем пак същия интеграл:

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx$$

в интервала $(-a, a)$, където $a > 0$, но чрез интегриране по части.

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \\ &= \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx + C = I_1 - I_2 + C \end{aligned}$$

Нека да пресметнем поотделно двата интеграла:

$$I_1 = \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = a^2 \arcsin\frac{x}{a} + D,$$

като последното равенство се получи от **пример 22.3**. Сега да сметнем втория интеграл като първо вкараме едно x под диференциала:

$$I_2 = \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}d(x^2)$$

След това умножаваме по -1 под диференциала и събираме с a^2:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}d(x^2) = -\frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}d(-x^2) = \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}d(a^2-x^2)
\end{aligned}
$$

Сега много ключов момент - понеже под диференциала получихме $t = a^2-x^2$, то тогава можем да вкараме израза $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = t^{-\frac{1}{2}}$ и понеже правим мислено интегриране спрямо t получаваме под знака на диференциала $2t^{\frac{1}{2}}$:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}d(a^2-x^2) = -\frac{1}{2}\int \frac{x}{t^{\frac{1}{2}}}dt = -\frac{1}{2}\int xt^{-\frac{1}{2}}dt = \\
&= -\frac{1}{2}\int xd2t^{\frac{1}{2}} = -2\frac{1}{2}\int xdt^{\frac{1}{2}} = -\int xd(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

И сега правим интеграла по части и получаваме:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -\int xd(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = -x(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + \int (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = \\
&= -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \sqrt{a^2-x^2}dx
\end{aligned}
$$

И някой ще попита какво хубаво излезе от целите тия сметки? Еми получихме изходния интеграл т.е.:

$$
I_2 = -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \sqrt{a^2-x^2}dx = -x\sqrt{a^2-x^2} + I
$$

Сега да заместим:

$$
\begin{aligned}
I &= I_1 - I_2 + C = a^2\arcsin\frac{x}{a} - (-x\sqrt{a^2-x^2} + I) + F = \\
&= a^2\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2} - I + F
\end{aligned}
$$

Остава да изразим само I и получаваме:

$$
\begin{aligned}
I &= a^2\arcsin\tfrac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2} - I + F \\
2I &= a^2\arcsin\tfrac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2} + F \\
I &= \tfrac{1}{2}\left[a^2\arcsin\tfrac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right] + L
\end{aligned}
$$