21.Изпъкнали функции. Критерии за изпъкналост

Определение 21.1 (Изпъкнала функция): Казваме, че f е изпъкнала функция в интервала $\triangle$, ако всяка отсечка, свързваща две различни точки от графиката на f, е лежи над графиката на f в интервала $\triangle$.

Определение 21.2 (Вдлъбната функция): Казваме, че f е вдлъбната функция в интервала $\triangle$, ако всяка отсечка, свързваща две различни точки от графиката на f, е лежи под графиката на f в интервала $\triangle$.

Теорема 21.1: Функцията $f(x)$ е изпъкнала в интервала $\triangle$ тогава и само тогава, когато

1. за всяко $x \in [x_1, x_2] \subseteq \triangle$ е изпълнено неравенството:

$$f(x) \leq \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

2. за всяко $x_1, x_2 \in \triangle$ и за всеки избор на $p_1, p_2 \geq 0$, такива че $p_1 + p_2 = 1$, е изпълнено

$$f(p_1 x_1 + p_2 x_2) \leq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2).$$

3. за $x \in (x_1, x_2) \subseteq \triangle$ е изпълнено

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}.$$

Доказателство:

1. Нека да разгледаме точките $A_1(x_1, f(x_1))$ и $A_2(x_2, f(x_2))$, които лежат на графиката на функцията f. Тогава уравнението на правата l, която минава през тях, има следния вид:
$$l : y = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2),$$
а уравнението на отсечката A_1A_2 е
$$l : y = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2),\ x \in [x_1, x_2].$$
Вземайки впредвид определението за изпъкнала функция, получаваме
$$f(x) \leq \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

2. Полагаме
$$p_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2},\ p_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$
Ясно е, че $p_1, p_2 \geq 0$, тъй като $x_1 \leq x \leq x_2$. Проверяваме условието за сбора на p_1 и p_2:
$$p_1 + p_2 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1$$
Последно изразяваме x от полагането за p_1 по следния начин:
$$x = x_2 + p_1(x_1 - x_2) = p_1x_1 + (1 - p_1)x_2 = p_1x_1 + p_2x_2.$$
С това доказахме втора точка от теоремата.

3. От точка 1. следва, че
$$\left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) f(x) = f(x) \leq \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$
Следователно
$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \left[f(x) - f(x_1)\right] \leq \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \left[f(x_2) - f(x)\right].$$
Тъй като $x_1 < x < x_2$, то получаваме
$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$
за всяко $x \in (x_1, x_2)$. ■

Теорема 21.2: Диференцируемата функция $f(x)$ е изпъкнала $\iff$ $f'(x)$ е монотонно растяща.

Следствие 21.1: Два пъти диференцируемата функция $f(x)$ е изпъкнала $\iff f''(x) \geq 0$.

Ще докажем подобни твърдения за вдлъбнати функции. За целта ще използваме следното твърдение:

Твърдение 21.1: $f(x)$ е изпъкнала $\iff -f(x)$ е вдлъбната.

Доказателство:
Следва директно от определението за вдлъбнатост и изпъкналост.■

Теорема 21.3: Диференцируемата функция $f(x)$ е вдлъбната $\iff$ $f'(x)$ е монотонно намаляваща.

Доказателство:
Диференцируемата функция $f(x)$ е вдлъбната $\iff$ диференцируемата функция $-f(x)$ е изпъкнала $\iff (-f(x))' = -f'(x)$ е монотонно растяща $\iff f'(x)$ е монотонно намаляваща. ■

Следствие 21.2: Два пъти диференцируемата функция $f(x)$ е вдлъбната $\iff f''(x) \leq 0$.

Теорема 21.4: Диференцируемата функция $f(x)$ е изпъкнала, ако се намира над всяка своя допирателна.

Твърдение 21.2: Нека $f(x)$ е вдлъбната в $(0, +\infty)$, $f(0) = 0$, тогава $\frac{f(x)}{x}$ е намаляваща.

Неравенство на Юнг: Нека неравенствата $a, b > 0$, $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ са изпълнени. Тогава $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}$.

Доказателство:

Да разгледаме функцията $f(x) = e^x$. Понеже $f'(x) = (e^x)' = e^x$ и $f''(x) = e^x > 0$, то $f(x)$ е изпъкнала функция. Тогава по точка 2 от теорема 21.1 всеки избор на $\frac{1}{p} > 0, \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} > 0$ е изпълнено, че:

$$e^{\frac{1}{p}x_1 + \frac{1}{q}x_2} \leq \frac{1}{p}e^{x_1} + \frac{1}{q}e^{x_2}.$$

Нека $e^{x_1} = a^p$ и $e^{x_2} = b^q$. Тогава получаваме след логаритмуване на двете страни $x_1 = \ln(e^{x_1}) = \ln(a^p) = p\ln a$ и $x_2 = \ln(e^{x_2}) = \ln(b^q) = q\ln b$. Следователно

$$e^{\frac{1}{p}p\ln a + \frac{1}{q}q\ln b} \leq \frac{1}{p}e^{x_1} + \frac{1}{q}e^{x_2} = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Сега да пресметнем лявата страна:

$$e^{\frac{1}{p}p\ln a + \frac{1}{q}q\ln b} = e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln ab} = ab$$

Така доказахме неравенството:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}$$

при условия $a, b > 0$, $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $\blacksquare$.

Неравенство на Хьолдер: За произволни положителни реални числа $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$ е изпълнено неравенството:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказателство:

Нека да положим

$$A_i = \frac{a_i}{(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}}, 1 \leq i \leq n$$

$$B_i = \frac{b_i}{(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}}, 1 \leq i \leq n.$$

Така получихме, че $A_i, B_i > 0$, защото $a_i, b_i > 0$. Нека $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Така условията в неравенството на Юнг са изпълнени и получаваме:

$$A_i B_i \leq \frac{A_i^p}{p} + \frac{B_i^q}{q}, 1 \leq i \leq n.$$

Събираме всички неравенства и получаваме:

$$\sum_{i=1}^{n} (A_i B_i) \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i^p}{p} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} B_i^q}{q}.$$

Сега да пресметнем дясната страна на полученото неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^p = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}} \right)^p = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i^p}{\left((\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} \right)^p} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p} \sum_{i=1}^{n} a_i^p = 1.$$

$$\sum_{i=1}^{n} B_i^q = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b_i}{(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}} \right)^q = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b_i^q}{\left((\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}} \right)^q} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b_i^q}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q} \sum_{i=1}^{n} b_i^q = 1.$$

Така получихме, че

$$\sum_{i=1}^{n} (A_i B_i) \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i^p}{p} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} B_i^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

и следователно

$$1 \geq \sum_{i=1}^{n} (A_i B_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}} \frac{b_i}{(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}} = \frac{1}{(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Така получихме:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

което се опитвахме да докажем. ■

Неравенство на Коши-Буняковски-Шварц: За произволни реални числа $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$ е изпълнено неравенството:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Забележка: Неравенството на Коши-Буняковски-Шварц е частен случай на неравенството на Хьолдер при $p = q = 2$.

Неравенство на Йенсен: $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е изпъкнала в интервала $\triangle$ $\Longleftrightarrow$ ако за всеки набор от n числа $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \triangle$ да съществуват числа $q_1, q_2, \ldots, q_n \geq 0$ със сума $q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$, такива че да е в сила неравенството:

$$q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \cdots + q_n f(x_n) \geq f\left(q_1 x_1 + q_2 x_2 + \cdots + q_n x_n\right)$$