20.Локални екстремуми. Някои необходими и някои достатъчни условия

Да припомним от тема 15 определенията за локален минимум, локален максимум и локален екстремум:

Определение 20.1: Казваме, че $f(x)$ има локален минимум в точката x_0 от своята дефиниционна област, ако съществува околност $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ (съдържаща се в дефиниционната област) такава, че за всяко x в тази околност е изпълнено $f(x) \geq f(x_0)$.

Определение 20.2: Казваме, че $f(x)$ има локален максимум в точката x_0 от своята дефиниционна област, ако съществува околност $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ (съдържаща се в дефиниционната област) такава, че за всяко x в тази околност е изпълнено $f(x) \leq f(x_0)$.

Определение 20.3: Казваме, че функцията f има локален екстремум в точката x_0, ако f има локален максимум и/или локален минимум в точката x_0.

Често в практиката се налага решаването на оптимизационни задачи. Например повечето фирми се стремят да си максимизират печалбата и да си минимизират разходите, студентите да максимизират успеха си и т.н.

Следващате теореми ни дават информация как да пресметнем най-голямата и най-малката стойност на дадена непрекъсната функция:

Теорема 20.1: Нека $f(x)$ е диференцируема в $[a, b]$. Тогава НГС (НМС) на f в интервала (a, b) се достига в краищата на интервала и/или в точка на локален максимум (локален минимум) в (a, b).

Теорема 20.2: Нека $f(x)$ е диференцируема в (a, b) и съществуват $\lim_{x \to a} f(x)$ и $\lim_{x \to b} f(x)$. Нека $L = \sup_{x \in (a,b)} f(x)$. Тогава е изпълнено поне едно от следните три условия:

1. $L = \lim_{x \to a} f(x)$;
2. $L = \lim_{x \to b} f(x)$;
3. L се достига в точка на локален максимум за функцията f в интервала (a, b).

Така задачата за намиране на НГС (НМС) се свежда до задача за пресмятане на локален екстремум на функция в даден интервал. Да припомним теормата на Ферма, която ни дава информация за точките на локален екстремум:

Теорема 20.3 (на Ферма): Нека f е диференцируема в точка x_0 и има локален екстремум в точката x_0. Тогава $f'(x_0) = 0$.

Следствие 20.4: Функцията $f(x)$ има локален екстремум в точката x_0. Тогава е изпълнено точно едно от следните две взаимноизключващи се условия:

1. f не е диференцируема в точка x_0;
2. f е диференцируема в точка x_0 и $f'(x_0) = 0$.

Твърдение 20.5: Нека $f(x)$ е 2 пъти диференцируема в околност на точката x_0. Ако $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то $f(x)$ има локален екстремум и

1. той е локален минимум, ако $f''(x_0) > 0$
2. той е локален максимум, ако $f''(x_0) < 0$

Теорема 20.6: Нека $f(x)$ е n пъти диференцируема в околност на точката x_0. Нека $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)} = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогава

1. Ако n е четно, то $f(x)$ има локален екстремум в точката x_0. Той е
   (а) локален минимум, ако $f^{(n)}(x_0) > 0$;
   (б) локален максимум, ако $f^{(n)}(x_0) < 0$.
2. Ако n е нечетно, то $f(x)$ няма локален екстремум в точката x_0.