2. Реални числа. Точна горна и долна граница

Числови множества Числата са възникнали още в древни времена. Първо са се появили естествените числа. Те се използват в онези времена основно за броене. Множеството от естествените числа се бележи с:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}.$$

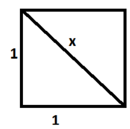
Ако съберем 2 естествени числа получаваме естествено число. Но решението на уравнението $a + x = b$ не е задължително да е естествено число. Например $3 + x = 2$ няма решение в естествени числа. Това налага появяването на отрицателните числа. На всяко число $n \in \mathbb{N}$ съпоставяме -n, такова че $n + (-n) = (-n) + n = 0$. Така като вземем естествените, отрицателните и 0 получаваме множеството на целите числа $\mathbb{Z}$ т.е.

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Сега уравнението $a + x = b$ има винаги решение в множеството на целите числа. Но нека да разгледаме уравнението $a \cdot x = b$. То не винаги има решение в множеството $\mathbb{Z}$. Например решението на $3 \cdot x = 2$ не е цяло число. Възниква нужда за допълнително разширяване на множеството на целите числа - появява се множеството на рационалните числа ($\mathbb{Q}$). Това са числа от вида $\frac{p}{q}$, където $p, q \in \mathbb{Z}$ и $q \neq 0$. Сега да се замислим знаем от училище, че $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$, а от предната тема ни е известно, че множеството не може да има повтарящи се елементи. Какво ще правим тогава? Много просто - за да имаме единствено срещане на всеки от елементите, трябва да ограничим по някакакъв начин p и q. Нека дробта $\frac{p}{q}$ е несъкратима т.е. НОД(най-големият общ делител) на p и q е 1. Последното се записва във вида $(p, q) = 1$. Така получихме, че

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1\}.$$

Сега да се върнем във времената на Питагоровата теорема. Един нещастник полетял от лодка, защото запитал Питагор каква е третата страна на правоъгълен триъгълник с катети 1 и 1.

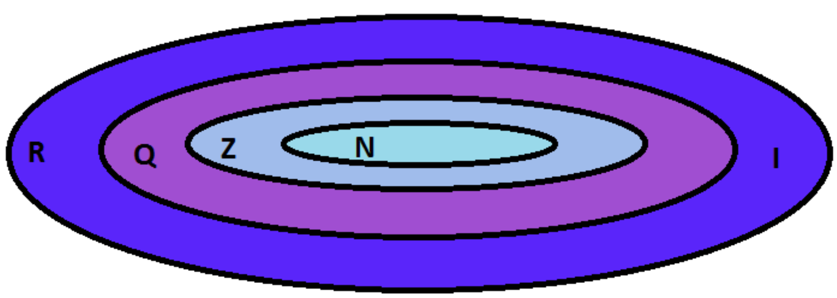


$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

Сега да проверим все пак, че наистина решението на уравнението $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ не е рационално число.

Допускаме противното, т.е че решението на уравнението $x^2 = 2$ е рационално число, т.е. х има представяне от вида $x = \frac{p}{q}, q \neq 0, (p,q) = 1$. Тогава заместваме в уравнението и получаваме $(\frac{p}{q})^2 = 2 \Longrightarrow p^2 = 2q^2$. Така получихме, че p^2 се дели на 2 т.е. р се дели на 2. Следователно р има представяне от вида $p = 2k$. Пак се връщаме и заместваме в уравнението и получаваме $(2k)^2 = 2q^2 \Longrightarrow 2k^2 = q^2$. Сега получихме, че q се дели на 2. Общо получихме, че и р, и q се делят на 2. А това е в противоречие с това, че $(p,q) = 1$.$\blacksquare$

Така изкарахме, че има поне 1 число, което не принадлежи на $\mathbb{Q}$. Ще означаваме с $\mathbb{I}$ числата, които не принадлежат на $\mathbb{Q}$ (или по-конкретно $\mathbb{I}$ се състой безкрайните непериодични десетични дроби; докато крайните и безкрайните периодични са от $\mathbb{Q}$). Ясно е, че $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$. Множеството на реални числа наричаме множеството, получено от обединението на рационалните и ирационалните числа т.е. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.



Аксиоми за събирането на реалните числа:

1. Ако $a, b \in \mathbb{R}$, то $a + b \in \mathbb{R}$ - затвореност относно събирането

2. $(a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$ - асоциативност относно събирането

3. $\exists\ 0 \in \mathbb{R} : a+0 = 0+a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ - съществуване нулев елемент

4. $\exists\ -a \in \mathbb{R} : a+(-a) = (-a)+a = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$ - съществуване на противоположен елемент

5. $a+b = b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$ комутативност на събирането

Определение 2.1 (изваждане): Изваждането се дефинира като събиране с отрицателен елемент т.е. $a-b \overset{\text{def}}{=} a+(-b)$

Следствия от аксиомите за събиране:

1. Съществува единствен нулев елемент

   Доказателство: Да допуснем, че съществуват поне 2 нулеви елемента - 0_1 и 0_2, като $0_1 \neq 0_2$. Тогава

   $$0_1 \overset{(3)}{=} 0_1 + 0_2 \overset{(3)}{=} 0_2,$$

   Така получихме, че $0_1 = 0_2$ и достигнахме до противоречие с допускането $0_1 \neq 0_2$. ■

2. Съществува единствен противоположен елемент.

   Доказателство: Да допуснем, че съществуват поне 2 противоположни елемента - $(-a)_1$ и $(-a)_2$, като $(-a)_1 \neq (-a)_2$. Тогава

   $$(-a)_2 \overset{(3)}{=} 0+(-a)_2 \overset{(4)}{=} ((-a)_1+a)+(-a)_2 \overset{(2)}{=} (-a)_1+(a+(-a)_2) \overset{(4)}{=}$$
   $$\overset{(4)}{=} (-a)_1 + 0 \overset{(3)}{=} (-a)_1,$$

   Така получихме, че $(-a)_1 = (-a)_2$ и достигнахме до противоречие с допускането $(-a)_1 \neq (-a)_2$. ■

3. Съществува единствено решение на уравнението $a+x=b$.

Доказателство:

(а) Първо ще докажем, че $x = b - a$ е решение на уравнението $a + x = b$.

$$a + (b + (-a)) \overset{(5)}{=} a + ((-a) + b) \overset{(2)}{=} (a + (-a)) + b \overset{(4)}{=} 0 + b \overset{(3)}{=} b$$

(б) Сега ще докажем, че е единствено решение. Да допуснем, че съществуват поне 2 решения на уравнението: $x_1 = b + (-a)$ и $x_2 \neq x_1$.

$$x_1 = b + (-a) = (a + x_2) + (-a) \overset{(5}{=} (x_2 + a) + (-a) \overset{(2)}{=}$$
$$\overset{(2)}{=} x_2 + (a + (-a)) \overset{(4)}{=} x_2 + 0 \overset{(3)}{=} x_2.$$

Така получихме, че $x_2 = x_1$ и достигнахме до противоречие с допускането $x_2 \neq x_1$. ∎

Аксиоми за умножение на реалните числа:

1. Ако $a, b \in \mathbb{R}$, то $ab \in \mathbb{R}$ - затвореност относно умножението
2. $(ab)c = a(bc) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ - асоциативност относно умножението
3. $\exists\ 1 \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ - съществуване единичен елемент елемент
4. $\exists\ a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}$ - съществуване на обратен елемент
5. $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ комутативност на умножението

Определение 2.2: Делението на 2 реални числа а и b (a/b) се дефинира като умножението на а с обратният елемент на b т.е. $a/b \overset{\text{def}}{=} a \cdot b^{-1}$

Следствия от аксиомите за умножение: Доказателствата са абсолютно аналогични на тези на следствията на аксиомите за събиране. Поради това и не са поместени долу.

1. Съществува единствен единичен елемент
2. Съществува единствен обратен елемент.
3. Съществува единствено решение на уравнението $a \cdot x = b$.

Дистрибутивни закони

1. $(a + b) \cdot c = ac + bc \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ - дистрибутивен закон

Аксиоми за наредбата:

1. В $\mathbb{R}$ е въведена релация на пълна наредба $\leq$:
   (а) Ако $a \neq b$, то $a < b$ или $a > b$ т.е. всеки 2 реални числа могат да бъдат сравнени.
   (б) Релацията $\leq$ е частична наредба(Ако не се сещате какво е релация - можете на погледнете първата лекция по АГ). Когато редим обекти, трябва да спазени някои основни правила да е наредба, а не хаос:
      i. $a \leq a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ - рефлексивност (да можем да наредим еднаквите)
      ii. $a \leq b$ и $b \leq a$, то тогава $a = b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ - антисиметричност (ако a може да е преди b и b може да е преди a, то двата са равни)
      iii. $a \leq b$ и $b \leq c$,то $a \leq c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ - транзитивност(ако a е преди b, а b е преди c, то би било логично a да е преди c)
2. Ако $a \leq b$, то $a + c \leq b + c$
3. Ако $a \leq b$ и $c \geq 0$, то $ac \leq bc$

Принцип на Архимед: Не съществува реално число по-голямо от всички естествени числа.

Интервал В математиката интервал от a до b е множество от реални числа, което се състои от всички числа, които се намират между 2 числа a и b. Като a и b се наричат краища на интервала. В зависимост дали интералът съдържа крйщата си или не интервалите се делят на следните видове:

Определение 2.3: Затворен интервал от a до b се нарича множеството $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Определение 2.4: Отворен интервал от a до b се нарича множеството $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

Определение 2.5: Полуотворен интервал от a до b (отворен от ляво и затворен от дясно интервал от a до b) се нарича множеството $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

Определение 2.6: Полуотворен интервал от a до b (затворен от ляво и отворен от дясно интервал от a до b) се нарича множеството $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

Краища на интервали безкрайности Възможно е a и b да не са фиксирани числа, а безкрайности:

Определение 2.7: $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$

Определение 2.8: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$

Определение 2.9: $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

Определение 2.10: $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

Определение 2.11: $(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\}$

Модул

Определение 2.12: Модул (или абсолютна стойност) на число наричаме разстоянието от нулата до образа на числото върху числовата ос.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ако } a \geq 0 \\ -a, & \text{ако } a < 0 \end{cases}$$

Свойства на модула:

1. $|a| \geq 0$ - очевидно

2. $|a| = |-a|$

   Доказателство:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ако } a \geq 0 \\ -a, & \text{ако } a < 0 \end{cases}$$

$$|-a| = \begin{cases} -a, & \text{ако } -a \geq 0 \\ -(-a), & \text{ако } -a < 0 \end{cases}$$

$$|-a| = \begin{cases} -a, & \text{ако } a \leq 0 \\ a, & \text{ако } a > 0 \end{cases}$$

   Понеже $|0| = 0$. То тогава

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ако } a \geq 0 \\ -a, & \text{ако } a < 0 \end{cases}$$

   т.е. $|a| = |-a|$. ■

3. $|a| \leq A \iff -A \leq a \leq A$

   Доказателство:

$$|a| \leq A \iff \begin{cases} a \leq A \\ -a \leq A \iff a \geq -A \end{cases} \iff -A \leq a \leq A. \blacksquare$$

4. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (неравенство на триъгълника)

Доказателство:
Имаме от свойство 2 при $A = a$, че $-a \leq |a| \leq a$ и $-b \leq |b| \leq b$. Следователно като съберем неравенствата получаваме

$$-(|a| + |b|) = -|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$$

и излиза, че $|a + b| \leq |a| + |b|$. ■

5. $|a - b| \geq ||a| - |b||$

Доказателство:

$$|a| = |a - b + b| \overset{(3)}{\leq} |a - b| + |b| \Longrightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$$

$$|b| = |-b| = |-a + a - b| \overset{(3)}{\leq} |-a| + |a - b| = |a| + |a - b|$$
$$\Longrightarrow |a - b| \geq |b| - |a| = -(|a| - |b|)$$

Така получихме $|a - b| \geq ||a| - |b||$. ■

Минимален и максимален елемент на множество

Определение 2.13: Най-малък елемент на едно множество M (минимален елемент на M) е такъв елемент $m \in M$, който е по-малък или равен на всички елементи от множеството. Бележим с $\min M$
Последното определение може да се запише и по следния начин:

$$x_0 = \min X \Longleftrightarrow x_0 \in X, x_0 \leq x \quad \forall x \in X$$

Определение 2.14: Най-голям елемент на едно множество M (максимален елемент на M) е такъв елемент $m \in M$, който е по-голям или равен на всички елементи от множеството. Бележим с $\max M$.
Последното определение може да се запише и по следния начин:

$$x_0 = \max X \Longleftrightarrow x_0 \in X, x_0 \geq x \quad \forall x \in X$$

Не всяко множество има минимален и максимален елемент.

Пример 2.1: Да разгледаме $\mathbb{N}$. Ще докажем, че $\mathbb{N}$ няма максимален елемент. Да допуснем, че $\mathbb{N}$ има най-голям елемент и нека той е $k \in \mathbb{N}$. Очевидно $k > 1 \in \mathbb{N}$. Но $k^2 > k$, тъй като $k > 1$ и $k^2 \in \mathbb{N}$, така получихме противоречие с максималността на k т.е. нямаме максимален елемент на множеството. Лесно се вижда, че 1 е минималният елемент на множеството.

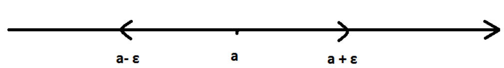
Пример 2.2: Да разгледаме множеството $M = \{\frac{1}{n}|n \in \mathbb{N}\}$, т.е. $M = \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}..., \frac{1}{n}, ...\}$. Да допуснем, че M има най-малък елемент и нека той е $\frac{1}{k} \in M$, ако $k > 1$, но понеже $\frac{1}{k^2} \in M$ и $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k}$ ($k > 1 \Rightarrow k^2 > 1$). Така получихме противоречие с минималността на $\frac{1}{k}$ т.е. нямаме минимален елемент на множеството.

Околност на точка. Горна и долна граница

Определение 2.15: ϵ - околност на точката a(при $\epsilon > 0$) наричаме всички точки x върху реалната права, такива че $|x - a| < \epsilon$ е изпълнено. Или по-просто казано ϵ - околност на точката a наричаме всички точки x, които се намират на разстояние от а по-малко от ϵ(затова и ϵ>0, защото е разстояние).
Сега малко да преобразуваме условието в дефиницията.

$$\begin{aligned} |x - a| < \epsilon &\iff -\epsilon < x - a < \epsilon \iff a - \epsilon < x < a + \epsilon \iff \\ &\iff x \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \end{aligned}$$

т.е. ϵ - околност на точката a наричаме всички точки $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$



Определение 2.16: Казваме, че множеството М е ограничено отгоре, ако съществува число U: $x \leq U \quad \forall x \in M$. (Казваме, че множеството М е ограничено отгоре, ако съществува число U, такова че всеки елемент x в М е по-малък от U.) Числото U се нарича горна граница.

Определение 2.17: Казваме, че множеството M е ограничено отдолу, ако съществува число L: $\forall x \in M \quad x \geq L$. (Казваме, че множеството M е ограничено отдолу, ако съществува число L, такова че всеки елемент x в M е по-голям от L.). Числото L се нарича долна граница.

Определение 2.18: Казваме, че множеството M е ограничено, ако е ограничено отгоре и ограничено отдолу.

Пример 2.3: Да разгледаме интервала $[2; 3]$ - интервалът е множество от точки. Множеството е ограничено отдолу, защото съществува например $L = 0$, за което е изпълнено всяко число от интервала $[2; 3]$ е по-голямо от L. Със същия успех можех да избера $L = 2$,$L = 1$ и т.н. . Множеството е ограничено отгоре, защото съществува $U = 3$, за което е изпълнено всяко число от интервала $[2; 3]$ е по-малко от U. (аналогично за горна граница можем да изберем $U = 4$, $U = 5$, ...). Така получихме, че множеството е ограничено отгоре и ограничено отдолу, т.е. множеството е ограничено.

Пример 2.4: Да разгледаме множеството $M = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, ...\}$. Това е множество, което е ограничено отдолу, защото съществува например $L = \sqrt{2}$, за което е изпълнено всяко число от M е по-голямо от L. Със същия успех можех да избера $L = 1$,$L = 0$ и каквото се сетите реално число по-малко от $\sqrt{2}$ дори $-\sqrt{5}12$. Обаче множеството M е неограничено отгоре т.е. не съществува такова число U: $x \leq U \quad \forall x \in M$. Да допуснем, че съществува такова U, за което е изпълнено $x \leq U \quad \forall x \in M$, то то е вярно и за $x = \sqrt{2} \in M$ следователно $U \geq \sqrt{2} > 0$. Понеже $\sqrt{U^4} \in M$ (заради дефиницията на M), то

$$U \geq \sqrt{U^4} = U^2 \Longleftrightarrow U - U^2 \geq 0 \Longleftrightarrow U(1 - U) \geq 0 \tag{1}$$

и понеже доказахме, че

$$U > \sqrt{2} > 1 \Rightarrow 1 - U < 0 \tag{2}$$

От (1) и (2) получаваме, че т.е. $U \leq 0$, което е в противоречие с $U \geq \sqrt{2}$ следователно M не е ограничено отгоре.■
Предполагам, че сте забелязали в примерите, че ако едно множество е ограничено отдолу, то има безброй много долни граници, а ако е ограничено отгоре, има безброй много горни граници.

Определение 2.19: Точна горна граница на ограничено отгоре множество X е неговата най-малка горна граница. Ще наричаме точната горна граница супремум. Бележим с $\sup X$.

Определение 2.20: Точна долна граница (инфинимум) на ограничено отдолу множество X наричаме неговата най-голяма долна граница. Бележим с $\inf X$.

В **пример 2.3** инфинимумът е 2, а супремумът е 3. В **пример 2.4** инфинимумът е $\sqrt{2}$.

Твърдение 2.1: Нека $a = \sup M$.Тогава $\forall \epsilon > 0$ съществува $x \in M$: $a - \epsilon < x$.

Доказателство:
Да допуснем противното т.е. не съществува $x \in M : a - \epsilon < x$. Следователно $\forall x \in M$ е изпълнено $x \leq a - \epsilon$. От където излиза по определението за горна граница, че $a - \epsilon$ е горна граница за M. Но $a - \epsilon < \epsilon$, то достигнахме до противоречие с допускането, че a е супремумът на M. ■

Твърдение 2.2: Нека $a = \inf M$.Тогава $\forall \epsilon > 0$ съществува $x \in M$: $a + \epsilon > x$.

Доказателство:
Абсолютно аналогично на предното твърдение.■
Така достиганахме до еквивалентни определения за супремум (инфинимум) от определнието за горна (долна) граница и **Твърдение 1** (**Твърдение 2**).

Определение 2.21: $\alpha = \sup X \iff \begin{cases} x \leq \alpha & \forall x \in X \\ \forall \epsilon > 0 & \exists x_\epsilon \in M : \alpha - \epsilon < x_\epsilon \end{cases}$

Определение 2.22: $\alpha = \inf X \iff \begin{cases} x \geq \alpha & \forall x \in X \\ \forall \epsilon > 0 & \exists x_\epsilon \in M : \alpha + \epsilon > x_\epsilon \end{cases}$

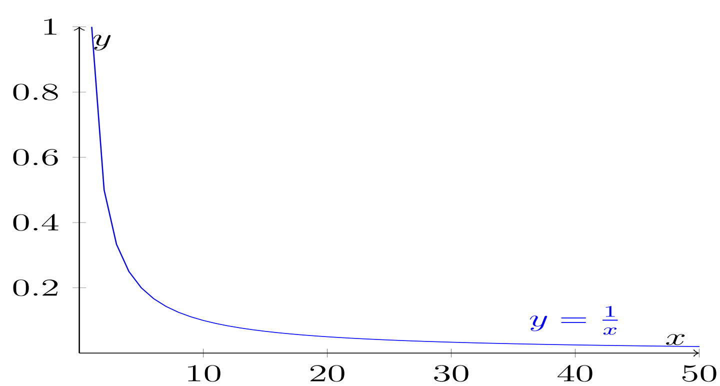
От определението се вижда, че ако супремумът(инфинимумът) принадлежи на множеството, то той е максималният(минималният) елемент в множеството.Ако съществува максимален (минимален) елемент в множеството, то той е супремум (инфинимум).

Пример 2.5($\inf M \notin M$): Да вземем множеството $M = \{\frac{1}{x} | x \in \mathbb{N}\}$, т.е. $M = \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} ... \frac{1}{n} ...\}$. Тогава множеството M няма минимален елемент (**пример 2.2**), но инфинимумът на множеството е в 0, защото

1. $\frac{1}{x} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{N}$

2. Да допуснем, че не е изпълнено $\forall \epsilon > 0 \quad \exists y_\epsilon \in M : 0 + \epsilon > y_\epsilon$ т.е. е изпълнено $\forall \epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{N} \quad 0 + \epsilon < y_\epsilon = \frac{1}{x}$. Понеже ϵ е произволно положително число, то можем да си го изберем примерно $\epsilon = \frac{1}{x^2}$. То тогава получаваме $\forall \epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x}$, което очевидно не е вярно и така достигнахме до противоречие с допускането, че $\forall \epsilon > 0 \quad \exists y_\epsilon \in M : 0 + \epsilon > y_\epsilon$ не е изпълнено.

След проверката на определението за inf достигнахме до извода, че $\inf M = 0$, от където следва, че не е задължително inf да е в множеството.



Принцип за непрекъснатост на реалните числа: Всяко непразно ограничено отгоре множество от реални числа има точна горна граница и всяко непразно ограничено отдолу множество има точна долна граница.

Интересното в случая е, че за рационалните числа са изпълнени, както аксиомите за събиране, умножение и дистрибутивните закони, също така и принципът на Архимед, единственото, което не е изпълнено е приц累ипът за непрекъснатост.

Пример 2.6: Да разгледаме множеството M от приближенията на $\sqrt{2}$ отдолу - 1;1.4;1.41;1.414;1.4142;... .. В случая е ясно, че множеството е ограничено отгоре и неговата горна граница е $\sqrt{2}$, но $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.