15.Теорема на Рол. Теорема на крайните нараствания. Теорема на Коши. Основна теорема на интегралното смятане

Определение 15.1: Казваме, че $f(x)$ има локален минимум в точката x_0 от своята дефиниционна област, ако съществува околност $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ (съдържаща се в дефиниционната област) такава, че за всяко x в тази околност е изпълнено $f(x) \geq f(x_0)$.

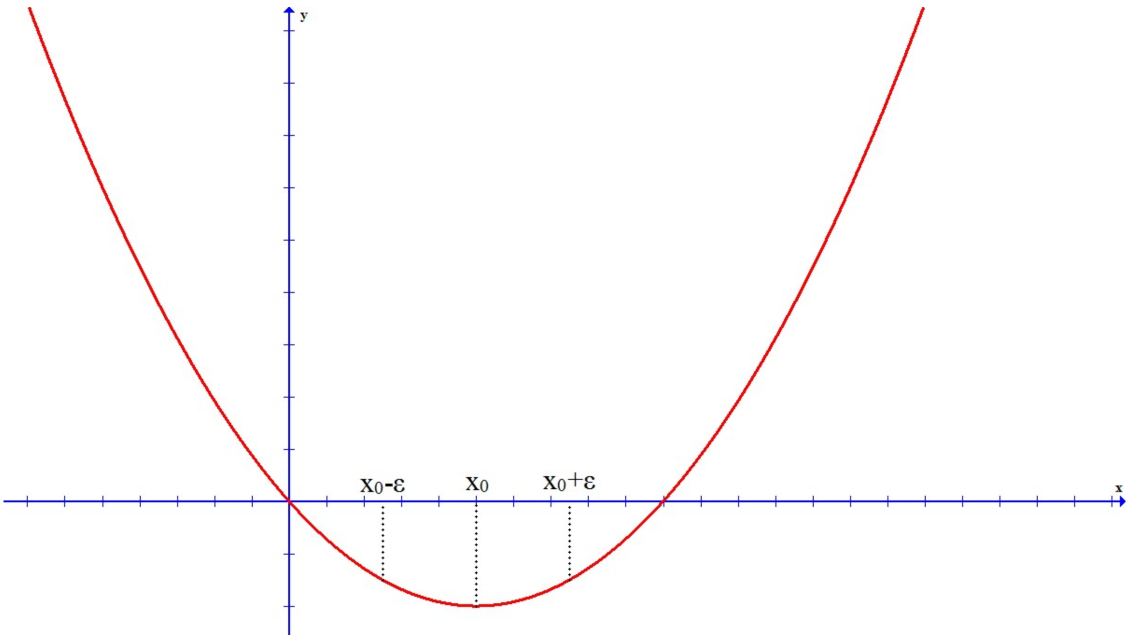
Забележка: Локален минимум се достига само във вътрешна за дефиниционното множество точка.

Определение 15.2: Казваме, че $f(x)$ има локален максимум в точката x_0 от своята дефиниционна област, ако съществува околност $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ (съдържаща се в дефиниционната област) такава, че за всяко x в тази околност е изпълнено $f(x) \leq f(x_0)$.

Забележка: Локален максимум се достига само във вътрешна за дефиниционното множество точка.

Определение 15.3: Казваме, че функцията f има локален екстремум в точката x_0, ако f има локален максимум и/или локален минимум в точката x_0.

Пример 15.1: Графиката на функцията $f(x) = x^2 - 2x,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е представена по-долу:



От графиката може да се заключи, че функцията има локален минумум в точка $x_0 = 1$, защото:

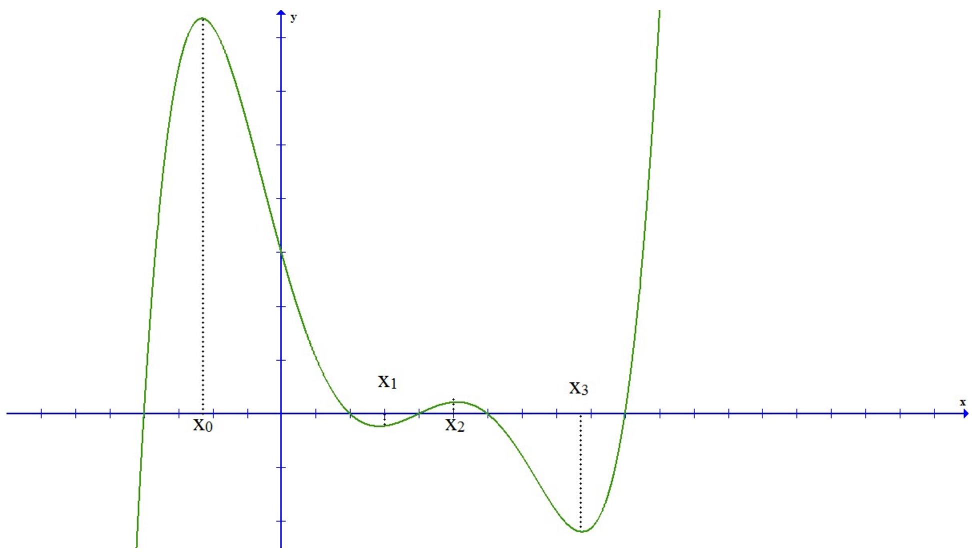
1. точката x_0 е вътрешна за $\mathbb{R}$;

2. каквото и $\varepsilon > 0$ да изберем е изпълнено $f(x) \geq f(x_0)$. Например всички стойности на функцията в интервала $(0, 2)$ са по-големи от $f(1) = -1$.

В конкретния пример точката на локален минимум може да се намери със знания от училище. Да представим $f(x)$ във вида: $f(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2+1$. Тъй като $(x-1)^2 \geq 0$, то точката, в която функцията достига минималната стойност, е решение на уравнението $f(x_0) = (x_0 - 1)^2 = 0$ или $x_0 = 1$.

Пример 15.2: Да разгледаме функцията $f(x) = x^2-2x,\ f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$. В този случай функцията няма локален минимум, тъй като x_0 не е вътрешна точка за $[1, +\infty)$ и следователно не е възможно да се намери ε-околност на x_0, която да е в дефиниционното множество.

Пример 15.3: Да разгледаме следния чертеж:



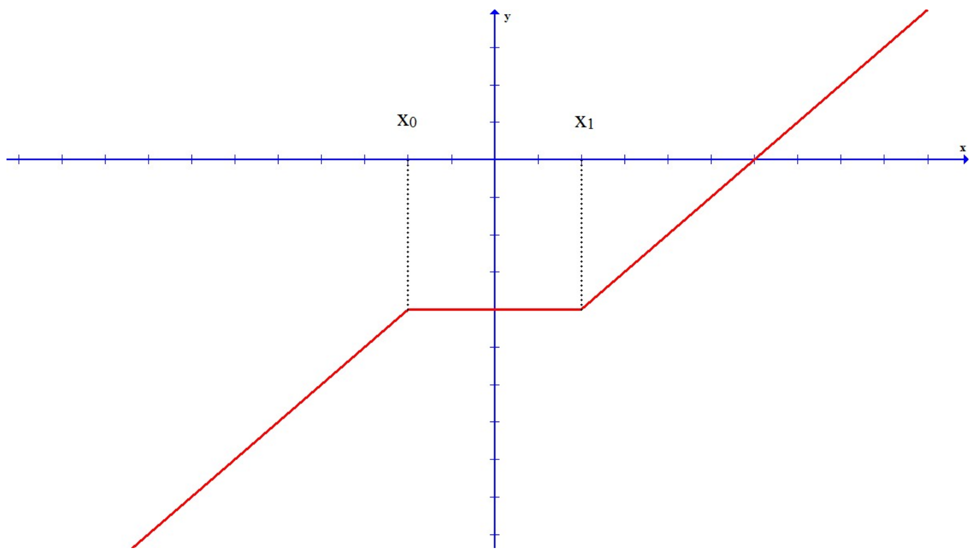
Функцията има локален максимум в точките x_0 и x_2, а локален минимум – в точките x_1 и x_3. Най-голямата стойност на функцията не е в нейния локален максимум, а най-малката - не е в нейния локален минимум. Това е причината да говорим за локален максимум/минимум, тъй те са екстремуми на локално ниво, но не е задължително да са в цялото дефиниционно множество.

Пример 15.4: Функцията $f(x) = x^2 - 2x,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ няма локален максимум.

Пример 15.5: Да разгледаме функцията

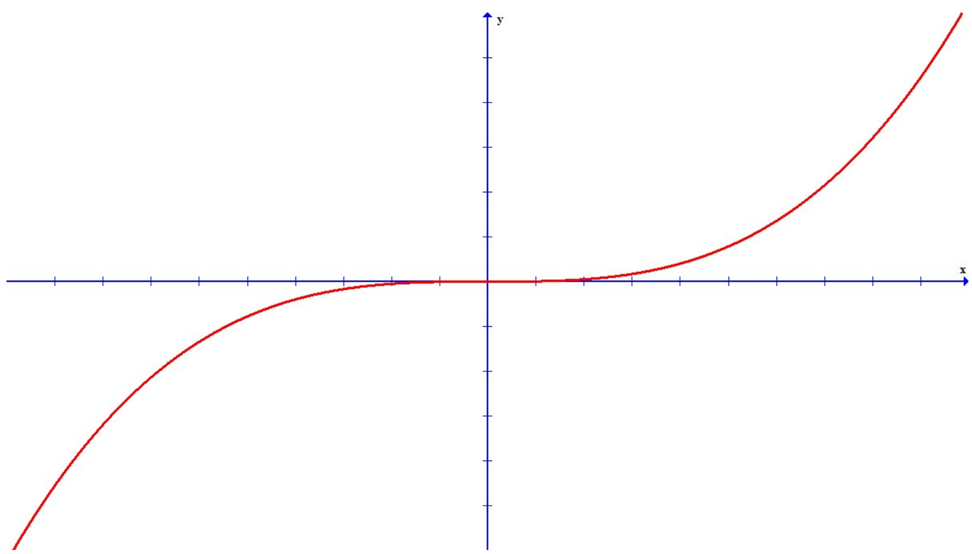
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ако } x < -1 \\ -2, \text{ако } x \in [-1, 1] \\ x - 3, \text{ако } x > 1 \end{cases} .$$

Нейната графика изглежда по следния начин:



Точката x_0 е точка на локален максимум, а точката x_1 е точка на локален минимум, а всяка точка $x* \in (x_0, x_1)$ е едновременно точка на локален минимум и точка на локален максимум.

Пример 15.6: Да разгледаме, функцията $f(x) = x^3$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Нейната графика изглежда по следния начин:

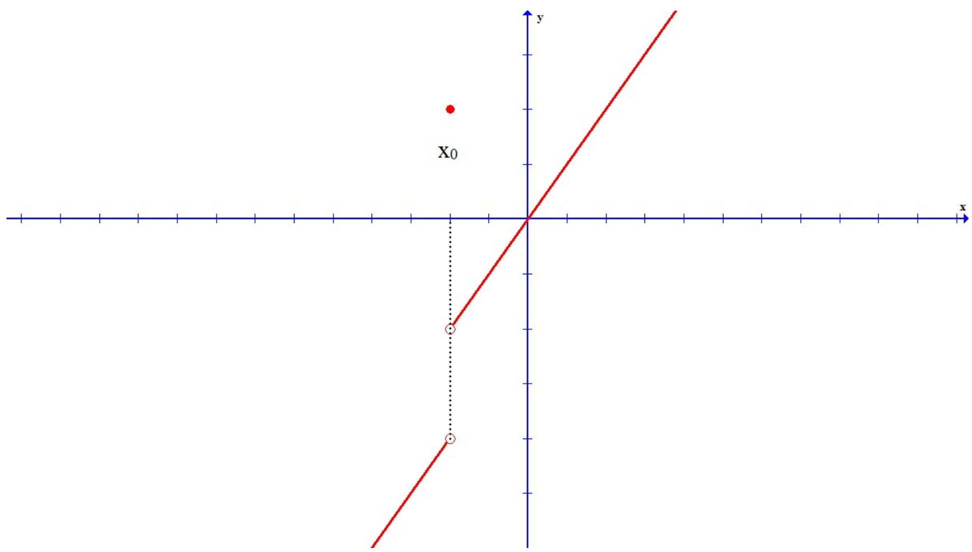


Функцията няма нито локален минимум, нито локален максимум в $\mathbb{R}$, тъй като функцията е растяща.

Пример 15.7: Да разгледаме прекъснатата функция

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ако } x < -1; \\ 1, & \text{ако } x = -1; \\ x, & \text{ако } x > -1 \end{cases}$$

и да начертаем нейната графика:



Точката на прекъсване -1 е точка на локален максимум на функцията.

Сега ще преминем към формулировката и доказателството на една основополагаща теорема:

Теорема 15.1 (Теорема на Ферма): Нека $f(x)$ е диференцируема в точка x_0 и има локален екстремум в точката x_0. Тогава $f'(x_0) = 0$.

Доказателство:
Нека x_0 е локален минимум на f, т.е. съществува интервал $I := (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ такъв, че за всяко $x \in I$ е изпълнено, че $f(x_0) \leq f(x)$. Разглеждаме диференчното частно:

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

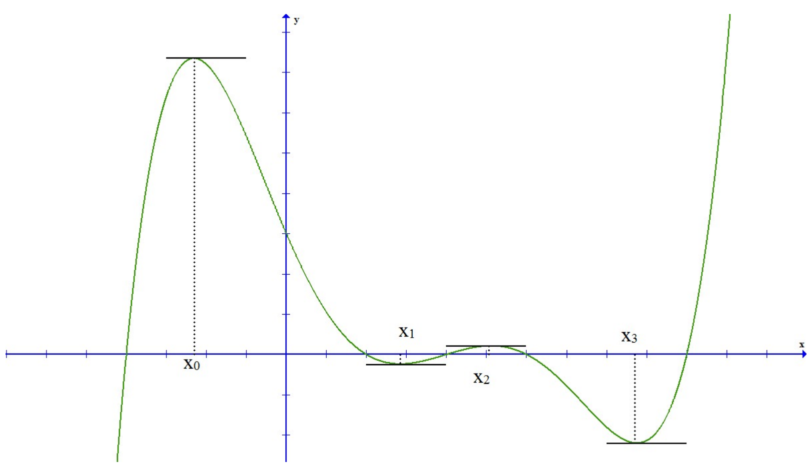
Ако $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, то $d(x) \leq 0$. Пускаме x да клони към x_0 отляво и получаваме, че

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} d(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} d(x) \leq 0.$$

От друга страна за $x > x_0$ е изпълнено $d(x) \geq 0$. Пускаме x да клони към x_0 отдясно и получаваме, че $f'(x_0) \geq 0$. Следователно $f'(x_0) = 0$.

Аналогично се доказва теоремата в случай, че x_0 е локален максимум на f. Опитайте сами да го докажете. ■

Забележка 1 (геометрична интерпретация): Производната на функцията f в точката x_0 е тангенсът на ъгъла α, който сключва допирателната към f в точката x_0 с абцисата. Тогава теоремата твърди, че ако функция има локален екстремум в точка x_0, то $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = 0$. Решенията на уравнението $\operatorname{tg}\alpha = 0$ са $\alpha_k = k\pi$, където $k \in \mathbb{Z}$. Тъй като $\alpha \in [0^\circ, 360^\circ)$, то $\alpha = 0^\circ$ или $\alpha = 180^\circ$. Следователно ъгълът между абцисата и допирателната към функцията в точка x_0 е 0° или 180°. Последното означава, че допирателната към функцията е успоредна на абцисата. Следователно можем да преформулираме теоремата по следния начин: Нека $f(x)$ е диференцируема в точка x_0 и има локален екстремум в точката x_0. Тогава допирателната в точката x_0 е успоредна на абсцисата. Нека да разгледаме графиката:



От геометрична гледна точка твърдението изглежда да е вярно.

Забележка 2: Изискването за диференцируемост е от съществено значение, защото то ни осигурява съществуването на производната. Ако функцията не е диференцируема в точката на локален екстремум, то тогава производната ѝ в тази точка не съществува и съответно формулата няма смисъл.

Забележка 3: Обратното твърдение не е вярно, т.е от $f(x)$ е диференцируема в точка x_0 и $f'(x_0) = 0$ не следва, че функцията има локален екстремум в точката x_0. Нека да разгледаме диференцируемата функция $f(x) = x^3$. Вече обсъдихме, че точката 0 не е точка на локален екстремум за функцията, но $f'(x) = 3x^2$ и следователно $f'(0) = 0$.

Теорема 15.2 (Теорема на Рол): Нека $f(x)$ е непрекъсната в крайния затворен интервал $[a, b]$ и диференцируема в отворения интервал (a, b). Ако $f(a) = f(b)$, то съществува $\xi \in (a, b)$ такова, че

$$f'(\xi) = 0.$$

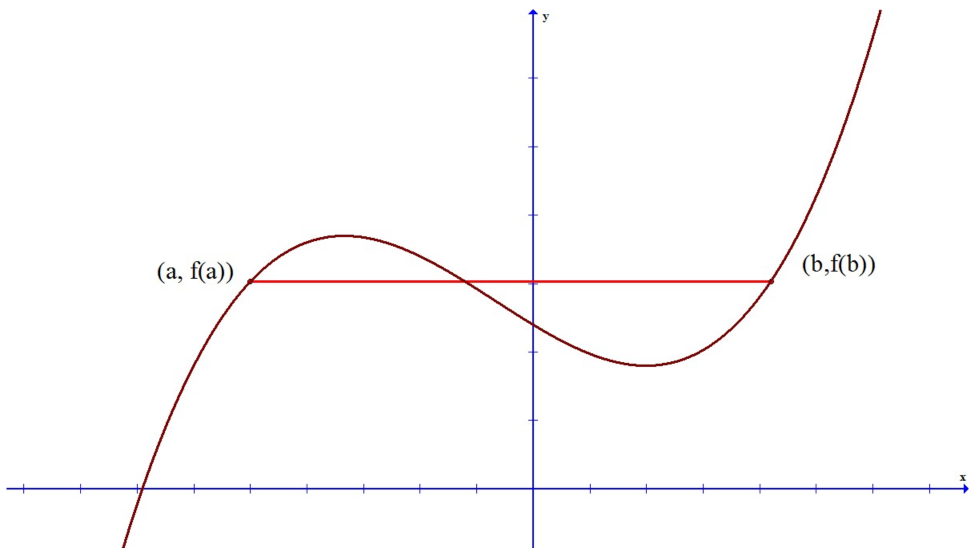
Доказателство:
Тъй като функцията $f(x)$ е непрекъсната в краен затворен интервал, то тя достига минимума и максимума си в него (по теоремата на Вайерщрас).

Първи случай: Ако $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Тогава $f(x) = const$ и следователно за всяко $\xi \in (a, b)$ е изпълнено, че $f'(\xi) = (c)' = 0$.

Втори случай: Ако $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \neq \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Тогава най-малката и/или най-голямата стойност на функцията се достига във вътрешна точка за интервала (a, b). Ще означим тази точка с ξ. Тогава в ξ функцията има локален екстремум. Следователно по теоремата на Ферма следва, че $f'(\xi) = 0$.

$\blacksquare$.

Забележка 1 (Геометрична интерпретация): Нека да разгледаме точките $(a, f(a))$ и $(b, f(b)) = (b, f(a))$. Тези точки трябва да лежат на графиката на непрекъсната в $[a, b]$ и диференцируема в (a, b). Това означава, че функцията можем да я начертаем без да вдигаме химикала от листа и да е гладка. Примери за две такива функции са нарисувани на чертежа:



Ярко червената функция на чертежа е постоянната функция $f(x) = f(a) = f(b)$. Ако функцията f не е постоянната, то тя ще мине над, под или да пресече графиката на постоянната функция. При всички положения тръгвайки от точка с ордината $f(a)$, функцията трябва да мине през друга точка с ордината $f(a)$. Последното означава, че може:

- Първо да расте, а после да намалява. В такъв случай функцията ще има локален максимум;
- Първо да се намалява, а после да расте. Тогава функцията ще има локален минимум;
- Или пък да има някакво по-сложно поведение, което да комбинира първите две (виж кафява крива на графиката). Тогава функцията ще има поне 1 локален екстремум.

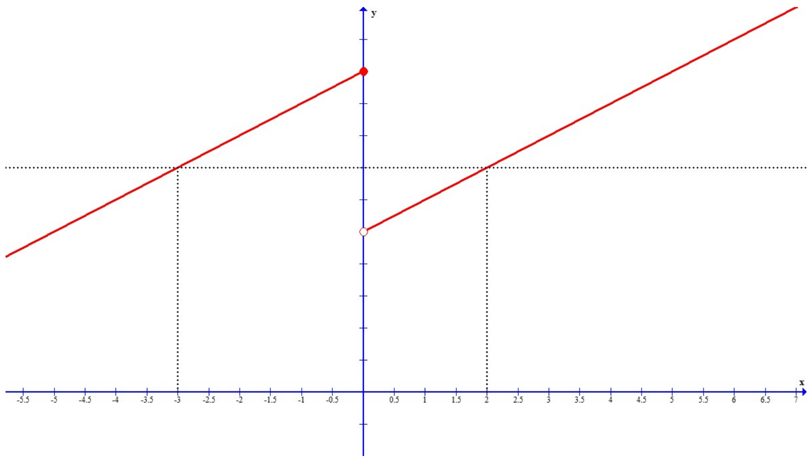
Всички тези случаи ще ни доведат до факта, че функцията ще има поне един локален екстремум и следователно ще съществува $\xi \in (a, b)$, което да удовлетворява $f'(\xi) = 0$.

Забележка 2: Защо е необходимо функцията да е напрекъсната?

Пример 15.8: Да разгледаме функцията

$$f(x) = \begin{cases} x + 10, \text{ако } x \leq 0, \\ x + 5, \text{ако } x > 0 \end{cases}$$

в интервала $[-3, 2]$, чиято графика е начертана по-долу:



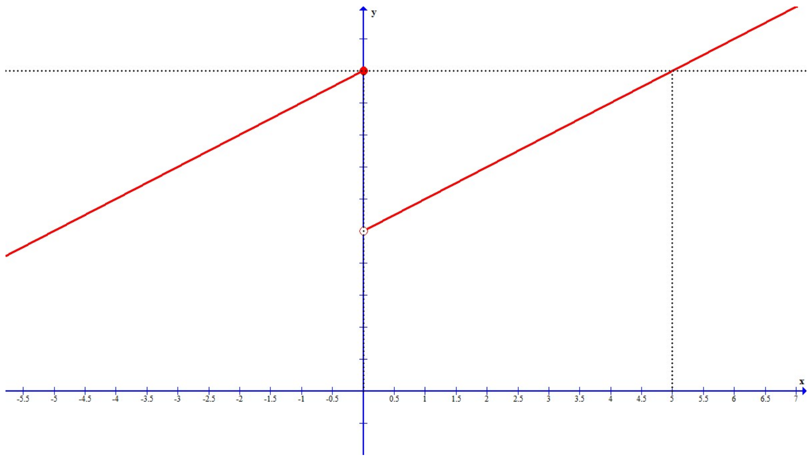
Функцията е прекъсната в точката $x = 0$ и не е диференцируема в точката $x = 0$, т.е. условията за непрекъснатост и диференцируемост са нарушени само и единствено в $x = 0$. Поради това не съществува точка, в която допирателната към функцията да е успоредна на абсцисната ос. По-конкретно функцията има локален максимум при $x = 0$, но в тази точка функцията не е диференцируема и съответно това води до несъществуването на точка, за която $f'(\xi) = 0$.

Забележка 3: Защо функцията е необходимо да е непрекъсната в затворен интервал? Няма ли да е достатъчно да е непрекъсната в отворен интервал?

Пример 15.9: Да разгледаме отново функцията

$$f(x) = \begin{cases} x + 10, \text{ ако } x \leq 0, \\ x + 5, \text{ ако } x > 0 \end{cases}$$

само че в интервала $(0, 5)$.



Тази функция е непрекъсната и диференцируема в интервала $(0, 5)$ (но е прекъсната в $x = 0$) и $f(0) = f(5) = 10$. Тази функцията няма точка, в която допирателната към функцията да е успоредна на абсцисата.

Забележка 4: Защо е необходимо функцията е диференцируема в целия интервал (a, b)? Защо в противен случай е възможно функцията да има локален екстремум, но той да е в точка, в която производната не съществува.

Пример 15.10: Да разгледаме

$$f(x) = |x|$$

в интервала $(-1, 1)$. Ясно е, че тази функция е непрекъсната, но е диференцируема навсякъде освен в $x = 0$. Локалният екстремум на f се достига при $x = 0$. Но $f'(x)$ не съществува в $x = 0$ и следователно условието $f'(x_0) = 0$ не е изпълнено.

Теорема 15.3 (Теорема на Лагранж): Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ и диференцируема в (a, b). Тогава съществува точка $\xi \in (a, b)$ такава, че

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Доказателство:

За да докажем, че съществува точка $\xi \in (a, b)$ такава, че

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi),$$

ще използваме теоремата на Рол за подходящо подбрана функция F. За целта ще разгледаме веригата от равенства:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(\xi) = \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x\right)' - f'(\xi)\\ &= \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x\right)'\Bigg|_{x=\xi} - f'(\xi) = \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x - f(x)\right)'\Bigg|_{x=\xi}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Тогава е подходящо да изберем F по следния начин:

$$F(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x - f(x).$$

Функцията F е непрекъсната в $[a,b]$ като сума от непрекъснати функции в $[a,b]$ и диференцируема в (a,b) като сума от диференцируеми функции в (a,b). Пресмятаме $F(a)$ и $F(b)$:

$$\begin{aligned}F(a) &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a - f(a) = \frac{f(b)a - f(a)b}{b-a},\\ F(b) &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b - f(b) = \frac{f(b)a - f(a)b}{b-a}.\end{aligned}$$

Така заключваме, че $F(a) = F(b)$. Следователно можем да приложим теоремата на Рол за F, т.е. съществува $\xi \in (a,b)$ такова, че $F'(\xi) = 0$. Взимайки предвид (1), достигаме до извода, че $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(\xi) = 0$ и следователно теоремата на Лагранж е изпълнена. ■

Забележка 1 (геометрична интерпретация): Разглеждаме функцията f и правата l, минаваща през точките $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Теоремата на Рол гласи, че съществува допирателна към f във вътрешна точка от (a,b), която е успоредна на l.

Забележка 2: Теоремата на Лагранж може да се преформулира по следния начин:

Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a, a+h]$ и диференцируема в $(a, a+h)$. Тогава съществува точка $\theta \in (0,1)$ такава, че

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h).$$

Тази формулировка се използва често в курса по Числени методи за диференциални уравнения.

Забележка 3: Теоремата на Рол е частен случай на теоремата на Лагранж, който се получава при $f(a) = f(b)$.

Теорема 15.4 (Теорема на Коши): Нека $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в $[a,b]$ и диференцируеми в (a,b). Ако $g'(x) \neq 0$ за всяко $x \in (a,b)$, то съществува точка $\xi \in (a,b)$ такава, че

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Доказателство:
За да докажем съществуването на точка $\xi \in (a,b)$ такава, че

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \tag{2}$$

ще използваме теоремата на Рол за подходящо подбрана функция F. Тъй като формула (2) е в неудобен за тази цел вид, то ще докажем, че е изпълнено

$$[f(b)-f(a)]\,g'(\xi) - [g(b)-g(a)]\,f'(\xi) = 0$$

или еквивалентно

$$\left\{[f(b)-f(a)]\,g(x) - [g(b)-g(a)]\,f(x)\right\}'\Big|_{x=\xi} = 0$$

Тогава е подходящо да изберем F по следния начин:

$$F(x) = [f(b)-f(a)]\,g(x) - [g(b)-g(a)]\,f(x).$$

Функцията F е непрекъсната в $[a,b]$ като линейна комбинация на непрекъснати функции в $[a,b]$ и диференцируема в (a,b) като линейна комбинация на диференцируеми функции в (a,b). Пресмятаме $F(a)$ и $F(b)$:

$$\begin{aligned} F(a) &= f(b)g(a) - f(a)g(b), \\ F(b) &= f(b)g(a) - f(a)g(b). \end{aligned}$$

Така заключваме, че $F(a) = F(b)$. Следователно можем да приложим теоремата на Рол за F, т.е. съществува $\xi \in (a,b)$ такова, че $F'(\xi) = 0$. Следователно

$$[f(b)-f(a)]\,g'(\xi) = [g(b)-g(a)]\,f'(\xi).$$

Единственото, което остава да проверим дали $g(a) \neq g(b)$. Да допуснем противното, т.е. $g(a) = g(b)$. Следователно съществува точка $x_0 \in (a,b)$, за която е изпълнено $g'(x_0) = 0$ по теоремата на Рол и следователно достигнахме до противоречие с факта $g'(x) \neq 0$ за всяко $x \in (a,b)$. Така доказахме, че $g(a) \neq g(b)$. Следователно $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. ■

Забележка: Ако $g(x) = x$, то $g'(\xi) = 1$. Замествайки във формулата:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

получаваме:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi),$$

т.е. теоремата на Лагранж за крайните нараствания е частен случай на теоремата на Коши.

Теорема 15.5 (Основна теорема на интегралното смятане): Нека $f(x)$ е диференцируема в интервала $\triangle$ и нека $f'(x) = 0$ за всяко $x \in \triangle$. Тогава $f(x)$ е константната функция в интервала $\triangle$.

Доказателство:
Нека x_1 и x_2 са произволни точки от интервала $\triangle$ и $x_1 < x_2$. Тъй като $f(x)$ е диференцируема в интервала $\triangle$ и $[x_1, x_2] \subseteq \triangle$, то $f(x)$ е непрекъсната в $[x_1, x_2]$ и диференцируема в (x_1, x_2). Тогава съществува $\xi \in (x_1, x_2)$ такова, че

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) = 0$$

по теоремата на Лагранж. Следователно $f(x_1) = f(x_2) = c$. Тъй като доказахме $f(x_1) = f(x_2) = c$ за две произволни точки x_1 и x_2 от интервала $\triangle$, то $f(x)$ е константа в интервала $\triangle$. ■

Определение 15.4: Функцията $f(x)$ е монотонно растяща в интервала $\triangle$, ако $f(x_1) \leq f(x_2)$ за всяко $x_1, x_2 \in \triangle$.

Определение 15.5: Функцията $f(x)$ е монотонно намаляваща в интервала $\triangle$, ако $f(x_1) \geq f(x_2)$ за всяко $x_1, x_2 \in \triangle$.

Твърдение 15.1: Нека $f(x)$ е диференцируема в интервала $\triangle$. Функцията $f(x)$ е монотонно растяща в $\triangle$ тогава и само тогава, когато $f'(x) \geq 0$ за всяко x в интервала $\triangle$.

Доказателство:

$\Longrightarrow$) Нека $f(x)$ е монотонно растяща в $\triangle$. Ще докажем, че $f'(x) \geq 0$ за всяко x в интервала $\triangle$. Нека x е произволна точка от интервала $\triangle$. Тогава съществува $h \neq 0$ такова, че $x+h$ да принадлежи на $\triangle$. Тъй като f е монотонно растяща в $\triangle$, то

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0,$$

без значение дали $h > 0$ или $h < 0$. Пускаме h да клони към 0. Използвайки диференцируемостта на f в $\triangle$, получаваме, че $f'(x) \geq 0$.

$\Longleftarrow$) Нека $f'(x) \geq 0$ за всяко x в интервала $\triangle$. Ще докажем, че $f(x)$ е монотонно растяща в $\triangle$. Нека x_1 и x_2 са произволни точки от интервала $\triangle$ и $x_1 < x_2$. Тъй като $f(x)$ е диференцируема в интервала $\triangle$ и $[x_1, x_2] \subseteq \triangle$, то $f(x)$ е непрекъсната в $[x_1, x_2]$ и диференцируема в (x_1, x_2). Тогава съществува $\xi \in (x_1, x_2)$ такова, че

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) \geq 0$$

по теоремата на Лагранж. Следователно $f(x_2) > f(x_1)$ (тъй като $x_2 > x_1$). Неравенството $f(x_2) > f(x_1)$ е изпълнено за две произволни точки x_1 и x_2 в интервала $\triangle$, за които $x_1 < x_2$. Следователно функцията f е монотонно растяща в $\triangle$. ■

Твърдение 15.2: Нека $f(x)$ е диференцируема в интервала $\triangle$. Функцията $f(x)$ е монотонно намаляваща в $\triangle$ тогава и само тогава, когато $f'(x) < 0$ за всяко x в интервала $\triangle$.

Доказателство:
Доказателството е аналогично на това на предишното твърдение. ■