14.Диференциал. Диференциране на съставни функции. Производни на елементарни функции

Теорема 14.1: Функцията f е диференцируема функция в точка x_0 тогава и само тогава, когато

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + \varepsilon(h), \tag{1}$$

където L е независимо от h и $\frac{\varepsilon}{h} \to 0$ при $h \to 0$.

Забележка 1: Ако f е диференцируема функция в точка x_0 следователно

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \varepsilon(h), \tag{2}$$

където $\varepsilon(h)$ показва грешката при приближаване на диференцируема функция в точка x_0 с допирателната в тази точка.

Забележка 2: Ако искаме да докажем, че една функция е диференцируема в дадена точка, то е достатъчно да докажем, че съществува представяне от вида (1).

Диференциране на съставни функции

Теорема 14.2: Нека $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми функции съответно в точките x_0 и $u_0 = f(x_0)$. Тогава съставната функция $F(x) = g(f(x))$ е диференцируема в точка x_0 и нейната производна може да се пресметне по следния начин:

$$F'(x_0) = f'(x_0)g'(u_0).$$

Забележка: За по-голяма яснота често се използва записът:

$$\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{dg}{df}\right|_{u=u_0} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

Доказателство:
Нека да въведем означението $F(x) = g(f(x))$. За да докажем диференцируемостта на съставната функция, ще докажем, че съществува представяне от вида (1). За целта пресмятаме:

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) = g(f(x_0) + f_1(h)) - g(f(x_0)),$$

където $f_1(h) = hf'(x_0) + \varepsilon_f(h)$ и $\frac{\varepsilon_f(h)}{h} \to 0$ при $h \to 0$. Последното равенство е изпълнено, тъй като f е диференцируема в x_0 (виж (2)). От друга страна g е диференцируема в u_0 следователно

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = f_1(h)g'\left(f(x_0)\right) + \varepsilon_g(h),$$

където $\frac{\varepsilon_g(h)}{f_1(h)} \to 0$ при $f_1(h) \to 0$. Така достигаме до извода:

$$\begin{aligned} F(x_0 + h) - F(x_0) &= \left[hf'(x_0) + \varepsilon_f(h)\right] g'(f(x_0)) + \varepsilon_g(h) \\ &= hf'(x_0)g'(u_0) + \varepsilon_F(h), \end{aligned}$$

където сме използвали означението:

$$\varepsilon_F(h) := g'(u_0)\varepsilon_f(h) + \varepsilon_g(h).$$

Образуваме частното:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_F}{h} &= g'(u_0)\frac{\varepsilon_f(h)}{h} + \frac{\varepsilon_g(h)}{h} = g'(u_0)\frac{\varepsilon_f(h)}{h} + \frac{\varepsilon_g(h)}{f_1(h)}\frac{f_1(h)}{h} \\ &= g'(u_0)\frac{\varepsilon_f(h)}{h} + \frac{\varepsilon_g(h)}{f_1(h)}\left(f'(x_0) + \frac{\varepsilon_f(h)}{h}\right). \end{aligned}$$

Трябва да докажем, че $\frac{\varepsilon_F}{h}$ при $h \to 0$. Тъй като $f(x)$ е диференцируема функция в точката x_0, то $\frac{\varepsilon_f}{h} \to 0$ при $h \to 0$. От $h \to 0$ следва $f_1(h) \to 0$. Последното влече след себе си $\frac{\varepsilon_g}{f_1(h)} \to 0$. Следователно $\frac{\varepsilon_F}{h} \to 0$ при $h \to 0$. Следователно F е диференцируема в x_0, тъй като

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + hf'(x_0)g'(u_0) + \varepsilon_F(h)$$

и $\frac{\varepsilon_F}{h} \to 0$ при $h \to 0$. От тук следва, че $F'(x_0)$ е равен на коефициента пред h, т.е.

$$F'(x_0) = f'(x_0)g'(u_0).$$

■

Теорема 14.3: Нека $f(x)$ е диференцируема и обратима и $f'(x) \neq 0$. Тогава обратната функция на f, $f^{-1}(y)$, е диференцируема и нейната производна може да се пресметне чрез формулата:

$$\frac{df^{-1}}{dy} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Доказателство:

Доказателството на формулата е сравнително лесно. Понеже $f^{-1}(y)$ е обратната на $f(x)$, то $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$. Ако f^{-1} е диференцируема, то можем да използваме правилото за диференциране на съставна функция. Тогава пресмятаме последователно

$$\frac{df^{-1}}{dy}\frac{df}{dx} = \frac{df^{-1}}{dx} = x' = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Разбира се, за да е валидно доказателството на формулата, трябва да докажем, че обратната е диференцируема. ■

Производни на елементарни функции Първо ще поместя таблицата с производните, после ще дам доказателство.

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$
8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

13. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Доказателство:

3) Пресмятаме последователно

$$(\ln x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0} \left[\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \left[\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right] =$$

$$= \frac{1}{x} \ln\left[\lim_{h\to 0} \left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right],$$

тъй като $\ln x$ е непрекъсната. Нека да положим $\frac{h}{x} = y$. Понеже $h \to 0$, то $y = \frac{h}{x} \to 0$. И така получаваме, че

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \ln\left[\lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}}\right] = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}.$$

2) Ако $y = e^x =: f^{-1}(x)$, то $x = \ln y = f(y)$, т.е $f^{-1}(x)$ е обратната функция на $f(y)$. Тогава от теорема 14.2 следва

$$\frac{df^{-1}}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x.$$

Така доказахме, че $(e^x)' = e^x$.

1) При $x > 0$ функцията x^n има представянето

$$x^n = e^{\ln x^n} = e^{n \ln x}$$

и следователно за производната на x^n получаваме

$$(x^n)' = (e^{n\ln x})' = e^{n\ln x}(n \ln x)' = x^n n(\ln x)' = x^n n\frac{1}{x} = nx^{n-1}.$$

При $x < 0$ функцията x^n има представянето

$$x^n = (-1)^n(-x)^n = (-1)^n e^{\ln(-x)^n} = (-1)^n e^{n\ln(-x)}$$

и следователно за производната на x^n получаваме

$$\begin{aligned}(x^n)' &= \left[(-1)^n e^{n\ln(-x)}\right]' = (-1)^n\left[e^{n\ln(-x)}\right]' = (-1)^n e^{n\ln(-x)}\left[n\ln(-x)\right]'\\ &= x^n n\left[\ln(-x)\right]' = x^n n\frac{1}{-x}(-x)' = x^n n\frac{1}{-x}(-1) = nx^{n-1}.\end{aligned}$$

Така получихме в крайна сметка, че $(x^n)' = nx^{n-1}$.

4) Тъй като $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x\ln a}$, то получаваме

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = a^x\ln a.$$

5) Понеже $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, то заключваме

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{(\ln x)'}{\ln a} = \frac{1}{x\ln a}.$$

6) Използвайки дефиницията за производна на $\sin x$, пресмятаме последователно

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{(x+h)-x}{2}\cos\frac{(x+h)+x}{2}}{h} =\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\frac{2x+h}{2} =\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\lim_{h\to 0}\cos\frac{2x+h}{2} = 1\cos\frac{2x}{2} = \cos x.\end{aligned}$$

7) Понеже $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Тогава с помощта на теоремата за сложна функция можем да пресметнем:

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)'\\ &= \sin x\cdot\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)' - (x)'\right] = \sin x\cdot(0-1) = -\sin x.\end{aligned}$$

8) Ще пресметнем производната на функцията tg, като използваме формулата за производна на частно:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

9) Понеже $\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Използвайки теоремата за сложна функция, получаваме

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

10) Ако $y = \arcsin x =: f^{-1}(x)$, то $x = \sin y = f(y)$. От теоремата за пресмятане на производната на обратна функция получаваме

$$(\arcsin x)' = \frac{df^{-1}}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Последното е вярно, тъй като $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и следователно

$$\cos(\arcsin x) \geq 0.$$

11) Доказахме накрая на тема 3), че $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Тогава имаме, че $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$. Сега диференцираме двете страни на равенството и получаваме:

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = 0 - (\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

12) Ако $y = \operatorname{arctg} x =: f^{-1}(x)$, то $x = \operatorname{tg} y = f(y)$. От теоремата за пресмятане на производната на обратна функция получаваме

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{df^{-1}}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}} = \frac{1}{\frac{\sin^2(\operatorname{arctg} x) + \cos^2(\operatorname{arctg} x)}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}}$$
$$= \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x) + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

13) Доказахме накрая на тема 3), че $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$. Тогава имаме, че $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x$. Сега диференцираме двете страни на равенството и получаваме:

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = 0 - (\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}$$

■