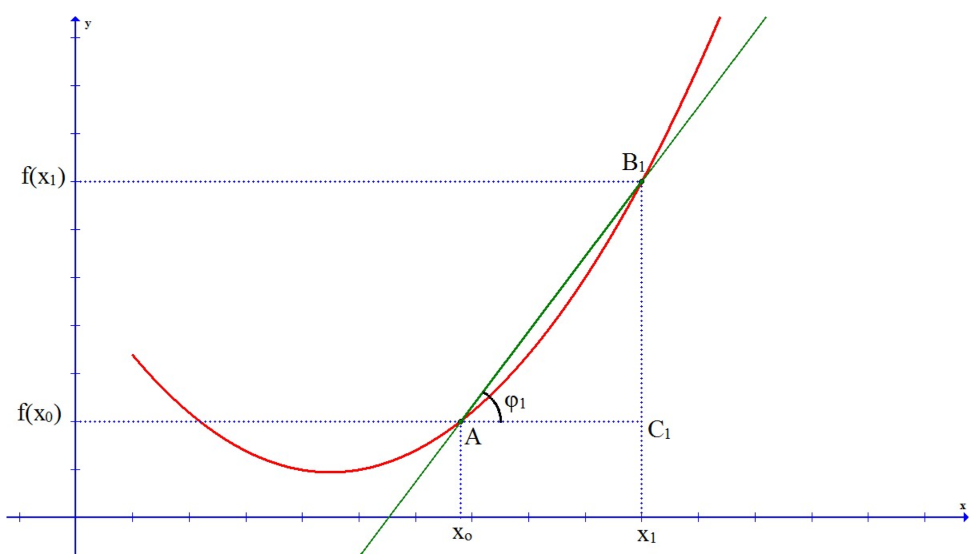
13.Производни. Физичен и геометричен смисъл. Свойства

Геометрична интерпретация на производна Ще започнем с геометричната интерпретация на производна. Нека е дадена непрекъснатата функция $f(x)$ (всъщност има и други необходими условия, които ще станат ясни по-нататък). Избираме проиволни точки A и B_1 от графиката на функцията $f(x)$. Нека B_1 е отдясно на A. Проектираме A и B_1 върху абцисата и ординатата и прекарваме права през тях. Виж изображението по-долу:



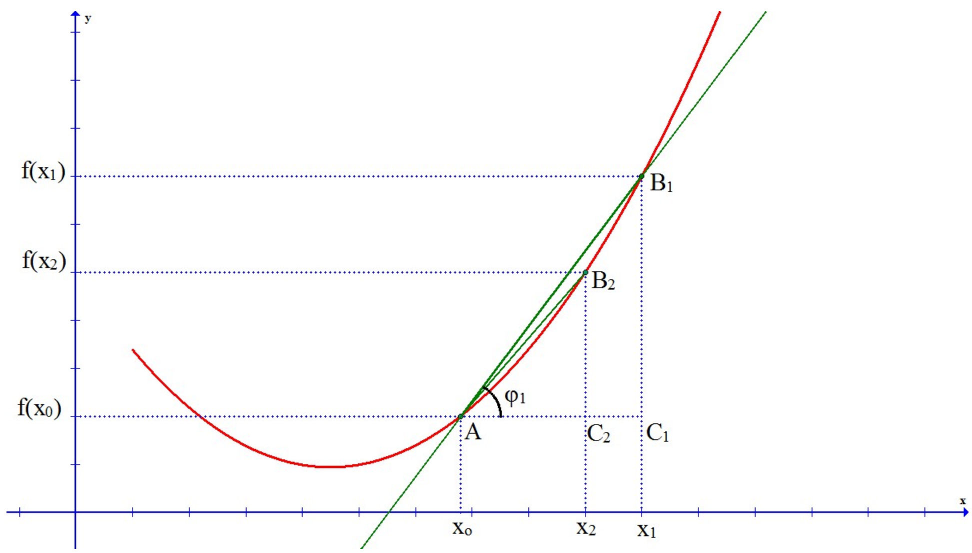
Да разгледаме $\triangle AB_1C_1$. Знаем, че

$$B_1C_1 = f(x_1) - f(x_0),\ AC_1 = x_1 - x_0.$$

Тогава пресмятаме

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Нека x_2 е средата на интервала $[x_0, x_1]$. Тогава издигаме препендикуляр от x_2 към графиката на функцията и означаваме пресечната точка на перпендикуляра с f с B_2, т.е.



В $\triangle AB_2C_2$ пресмятаме

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$

Построяваме следващите членове на редицата по формулата:

$$x_{n+1} = x_0 + \frac{x_n - x_0}{2} = \frac{x_n + x_0}{2}. \tag{1}$$

Редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е строго намаляваща и ограничена отдолу от x_0, защото

$$x_0 < \ldots.. < x_n < \ldots. < x_3 < x_2 < x_1.$$

Следователно редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща. Нека да означим с l границата на $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Във формула (1) правим граничен преход и получаваме:

$$l = \frac{l + x_0}{2},$$

т.е $l = x_0$. Тъй като функцията $f(x)$ е непрекъсната, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Това означава, че редицата от точки $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ клони към A (т.е. точките B_n се доближават безкрайно много до точката A по графиката на функцията). Тогава правата, минаваща през точките A и B_n, се доближава безкрайно много до допирателната към графиката в точката x_0. Редицата от ъглите $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ клони отдясно към ъгъла, който допирателната към функцията в точката x_0 сключва с абсцисната ос, α. Тъй като tg е непрекъсната функция, то $\operatorname{tg}\varphi_n$ клони към $\operatorname{tg}\alpha$.

Определение 13.1: Ще казваме, че функцията f е диференцируема отдясно в точката x_0, ако съществува границата $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Определение 13.2: Ще казваме, че функцията $f(x)$ е диференцируема отляво в точката x_0, ако съществува границата $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Определение 13.3: Ще казваме, че функцията f е диференцируема в точката x_0, ако съществува границата $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Тази граница се нарича производна.

Досега разбрахме,че производната на функцията f в точката x_0 се дефинира по следния начин:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{2}$$

Нека да въведем нова променлива $h = x - x_0$. Тогава можем да изразим точката x спрямо x_0 по следния начин: $x = x_0 + h$. Замествайки в (2), получаваме еквивалентната дефиниция на производната на f в точката x_0:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{3}$$

Често е необходимо да пресметнем производната на дадена функция f във всяка точка x от даден интервал. Следователно би било удобно да можем да пресметнем производната на функцията f в зависимост от произволна точка x. Поради това се въвежда понятието „производна на функция". Ще казваме, че $f'(x)$ е производната на функцията f, ако f' съпоставя на всяка точка x стойността на производната на f в точката x. Производната на f се бележи с $f'(x)$ (чете се „еф прим") или с $\frac{df}{dx}$ (чете се „де еф де хикс"). При пресмятане на производна в дадена точка x_0 се използва означенията $f'(x_0)$ и $\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}$. Действието „намиране на производна на функция f" се нарича диференциране на f.

Твърдение 13.1: Ако една функция е диференцируема в точката x_0, то тя е непрекъсната в x_0.

Забележка: Обратното не е вярно. Например $g(x) = |x|$ е непрекъсната в 0, но не няма производна в нулата. Последното може лесно да се установи, като се начертае графиката на функцията.

Свойства на производните

Твърдение 13.2: Ако $f(x) = c = const$, то $f'(x) = 0$.

Доказателство:
Тъй като $f(x) = c = const$, то $f(x+h) = c$. Тогава получаваме

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Твърдение 13.3: Нека f е диференцируема функция, а c е константа. Тогава

1. $(c \cdot f(x))' = cf'(x)$;
2. $\left(\dfrac{c}{f(x)}\right)' = -\dfrac{cf'(x)}{f^2(x)}$ при положение, че $f(x) \neq 0$.

Доказателство:

1. За да докажем твърдението, трябва да докажем, че на първо място, че границата

$$\lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \tag{4}$$

съществува. Тогава функцията $cf(x)$ има производна и тя е равна на (4). След което ще докажем исканата формула. За целта разписваме (4) по следния начин:

$$\lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}=c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Тъй като f е диференцируема, то границата $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ съществува. Следователно и $\lim\limits_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}$ съществува, т.е. $cf(x)$ е диференцируема. Остава да докажем формулата:

$$[cf(x)]'=\lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}=c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=cf'(x).$$

2. За да докажем твърдението, трябва да покажем, че границата

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{c}{f(x+h)}-\frac{c}{f(x)}}{h}.$$

съществува. Пресмятаме последователно

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\frac{c}{f(x+h)}-\frac{c}{f(x)}}{h}&=\lim_{h\to 0}c\frac{f(x)-f(x+h)}{hf(x)f(x+h)}\\&=c\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{f(x)f(x+h)}.\end{aligned}$$

От една страна границата $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{h}$ съществува, тъй като f е диференцируема. От друга страна границата $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{f(x)f(x+h)}$ съществува поради непрекъснатостта на f (която следва от диференцируемостта на f). Така получаваме, че съществува границата $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(x+h)}-\frac{1}{f(x)}}{h}$ и следователно функцията $\dfrac{c}{f(x)}$ е диференцируема. Остана да докажем формулата само, която следва директно:

$$\begin{aligned}\left(\frac{c}{f(x)}\right)'&=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{c}{f(x+h)}-\frac{c}{f(x)}}{h}\\&=c\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{f(x)f(x+h)}=-\frac{cf'(x)}{f^2(x)}.\end{aligned}$$

Твърдение 13.4: Нека f и g са диференцируеми функции. Тогава

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;
2. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;
3. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$ при положение, че $g(x) \neq 0$.

Доказателство:

1. Нека да въведем функцията $F(x) = f(x) + g(x)$, тогава $F(x+h) = f(x+h) + g(x+h)$. От тук нататък, за да спестим писане, ще използваме следния условен запис:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

   Трябва да отбележим, че от веригата равенства се вижда, че производната на сумата $f(x) + g(x)$ съществува и и следователно извеждането си е валидно.

   Аналогично се извежда $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$

2. Нека да означим $F(x) = f(x) \cdot g(x)$. Тогава получаваме последователно

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]\, g(x+h) + f(x)\,[g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h\to 0} g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

3. Използвайки формулата за производна на произведение получаваме:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}.\end{aligned}$$