11.Непрекъснатост на функции. Свойства на непрекъснатите функции

Ще започнем с интуитивна дефиниция на понятието непрекъснатост на функция. Казваме, че една функция е непрекъсната в интервала I, ако можем да начертаем нейната графика в интервала I можем да начертаем без да вдигаме химикала от листа. Непрекъсната функция в множеството

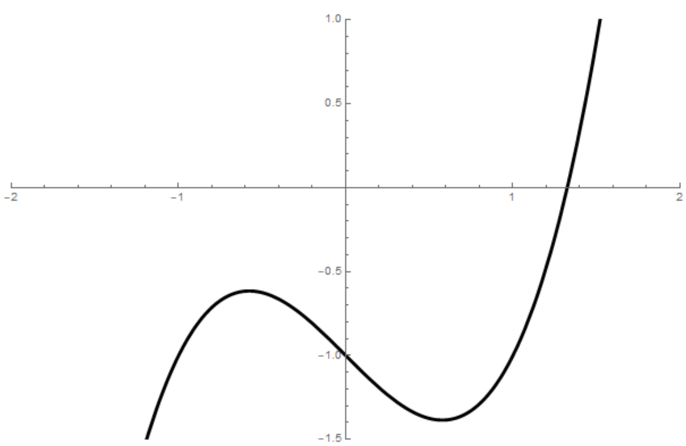
$$D = I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n$$

е такава функция, чиято графика във всеки един от интервалите $I_k,\ k = \overline{1, n}$ можем да начертаем без да вдигаме химикала от листа.

Пример 11.1: Да разгледаме функцията:

$$f(x) = x^3 - x - 1,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

По-долу е поместена графиката ѝ:



От графиката си личи, че тази функция е непрекъсната в интервала $(-\infty, \infty)$, защото колкото и голям интервал да изберем винаги ще можем да начертаем f в него без да вдигаме химикала от листа.

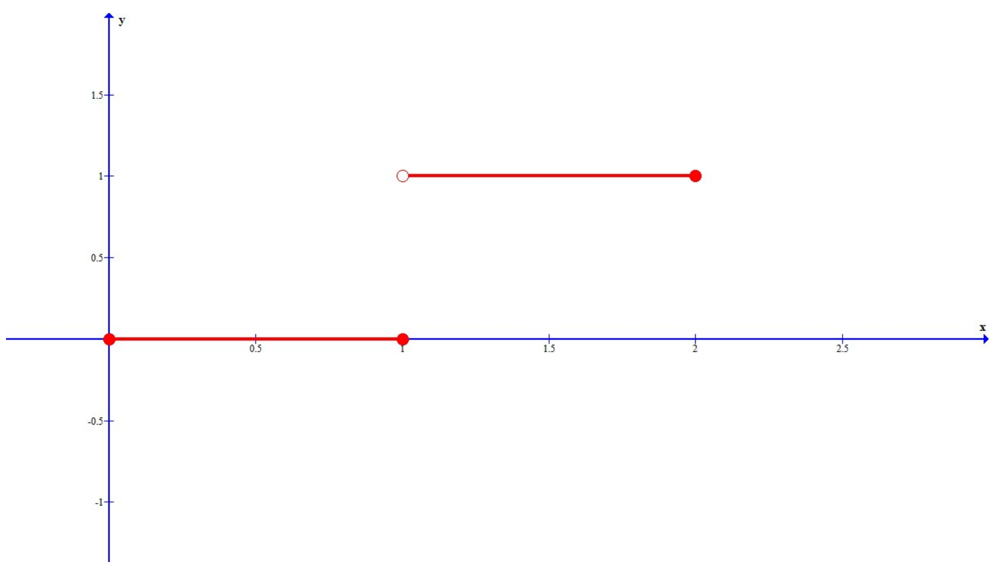
Забележка 1: Може да се докаже, че произволен полином от степен n е непрекъсната функция в $(-\infty, \infty)$.

Забележка 2: Функцията е непрекъсната за всяко подмножество D на $(-\infty, \infty)$.

Пример 11.2: Да разгледаме функцията

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{ако } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Нейната графика изглежда така:

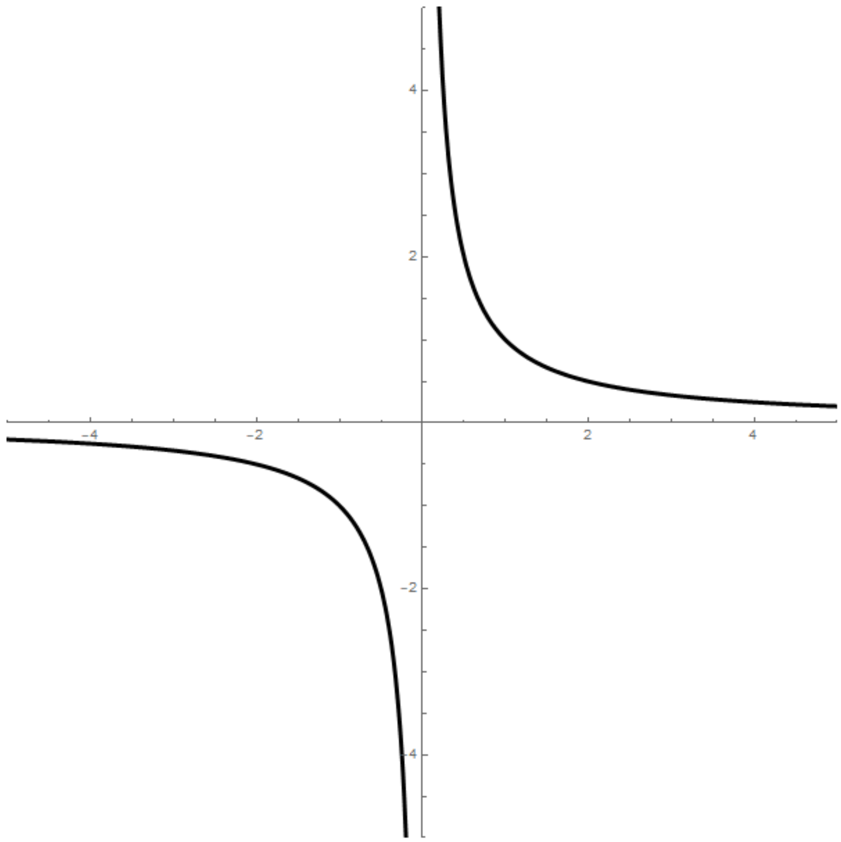


Функцията е прекъсната в 1, тъй като е невъзможно да начертаем функцията без да вдигаме химикала от листа. По-конкретно ще трябва задължително в 1 да вдигнем химикала от листа.

Пример 11.3: Да разгледаме функцията

$$f(x) = \frac{1}{x}, \ f : \mathbb{R} \ /\{0\} \to \mathbb{R}/\{0\}.$$

По-долу е поместена графиката ѝ:



Тъй като:

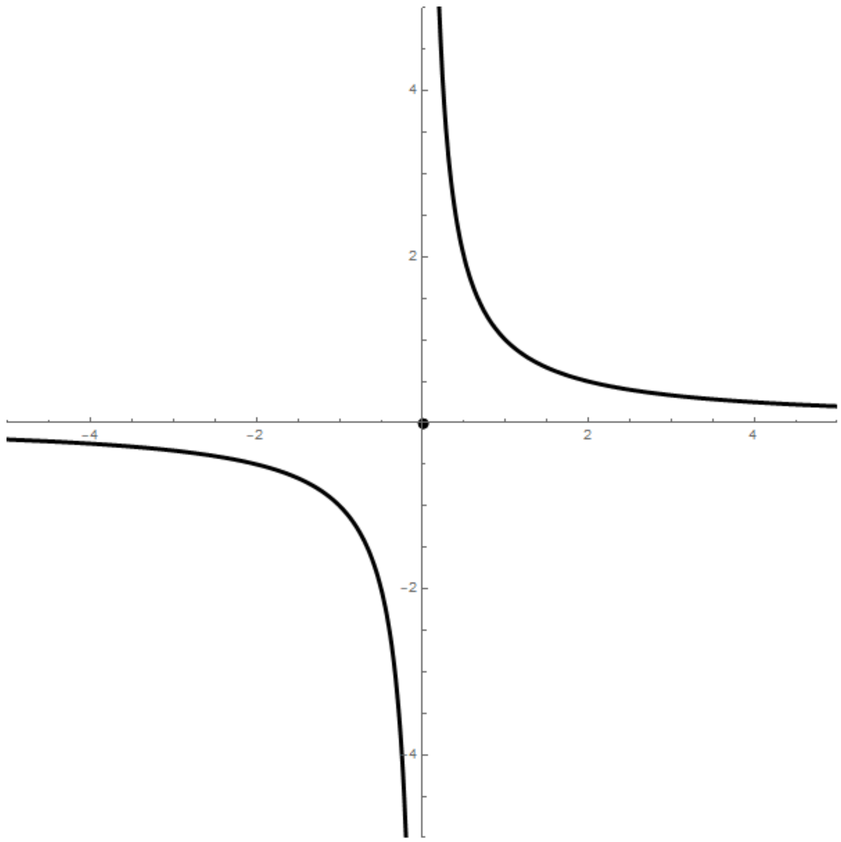
- можем да начертаем f в интервала $(-\infty, 0)$ без да вдигаме химикала от листа;
- можем да начертаем f в интервала $(0, \infty)$ без да вдигаме химикала от листа,

то f е непрекъсната в $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Пример 11.4: Графиката на функцията

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

изглежда така:

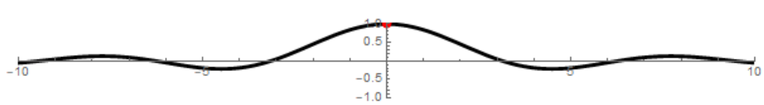


В предния пример видяхме, че функцията f е непрекъсната в $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Ясно е обаче, че тя не е непрекъсната в интервала $(-\infty, +\infty)$ (т.е. функцията е прекъсната в този интервал). Причината е, че трябва да вдигнем химикала в 0 при опит да начертаем функцията в интервала.

Пример 11.5: Функцията

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

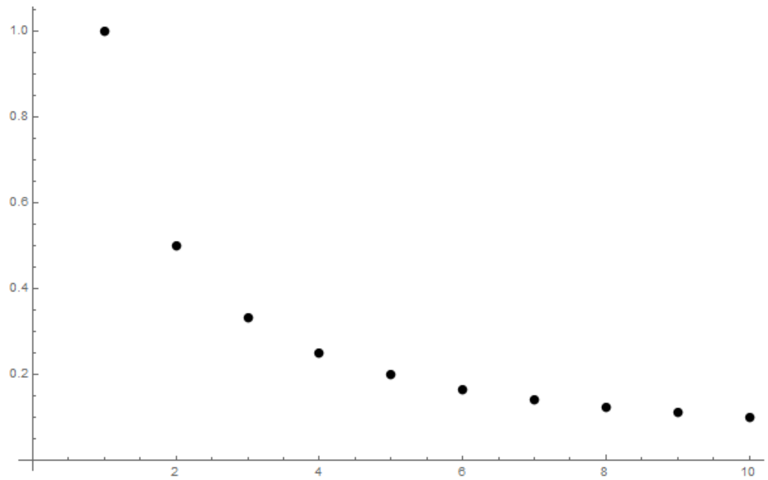
е непрекъсната $(\infty, +\infty)$. За да се уверите, разгледайте графиката:



.

където точката $(0, 1)$ е начертана с червено.

Пример 11.6: Графиката на функцията $f(x) = \frac{1}{x}$, $D : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ е непрекъсната върху $\mathbb{N}$:



.

Причината за това е, че можем да си мислим за изолираната точка $\{x_k\}$ като интервала $[x_k, x_k]$. Така функцията $f(x)$ е непрекъсната върху $\mathbb{N}$ (обединение на безброй много затворени интервали).

Определение 11.1: Нека $f(x)$ е функция с дефиниционна област D. Казваме, че функцията f е непрекъсната в точката x_0, ако

$$x_0 \text{ е изолирана точка от множеството } D$$

или

$$x_0 \text{ е точка от } D,\ x_0 \text{ е точка на сгъстяване на множеството } D,$$
$$\text{съществува } \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ и } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ако функцията f е непрекъсната във всяка точка от множеството D, то казваме, че f е непрекъсната в D.

Забележка 1: За да бъде f непрекъсната в точката x_0 е необходимо x_0 да е от дефиниционното множество.

Забележка 2: Условията „x_0 е точка от D, x_0 е точка на сгъстяване на множеството D“ не могат да бъдат заменени от „x_0 е точка на сгъстяване на множеството D“, тъй като в такъв случай не е задължително x_0 да е от D.

Непрекъснатост на функция може да бъде дефинирана еквивалентно по следния начин:

Определение 11.2 (на Коши): Нека $f(x)$ е дефинирана в множеството D и нека x_0 е точка от D. Ще казваме, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0, ако при всеки избор на положителното число ε може да се намери такова число $\delta > 0$, че от условията $x \in D$ и $|x - x_0| < \delta$ да следва неравенството $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Определение 11.3 (на Хайне): Нека $f(x)$ е дефинирана в множеството D. Ще казваме, че $f(x)$ е непрекъсната в x_0, когато каквата и клоняща към x_0 редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ от точки от D да изберем, съответната редица от функционални стойности $\{f(x_n)\}$ да клони към $f(x_0)$.

Твърдение 11.1: Дефинициите 11.1, 11.2 и 11.3 са еквивалентни.

Твърдение 11.2: Нека $f(x)$ е функция с дефиниционна област D и x_0 е точка на сгъстяване на D. Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в x_0, то съществуват границите $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ и

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) = L.$$

Прекъсване от първи род.

Определение 11.4: Функцията $f(x)$ има прекъсване от първи род в точката x_0, ако съществуват едновременно $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$, но те не са равни едновременно на $f(x_0)$.

Пример 11.7: Функцията f в **пример 11.2** има прекъсване от първи род в $x_0 = 1$, тъй като:

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \to 1-} f(x) = 0.$$

Определение 11.5: При прекъсване от първи род разликата

$$d := \lim_{x \to x_0+0} f(x) - \lim_{x \to x_0-0} f(x)$$

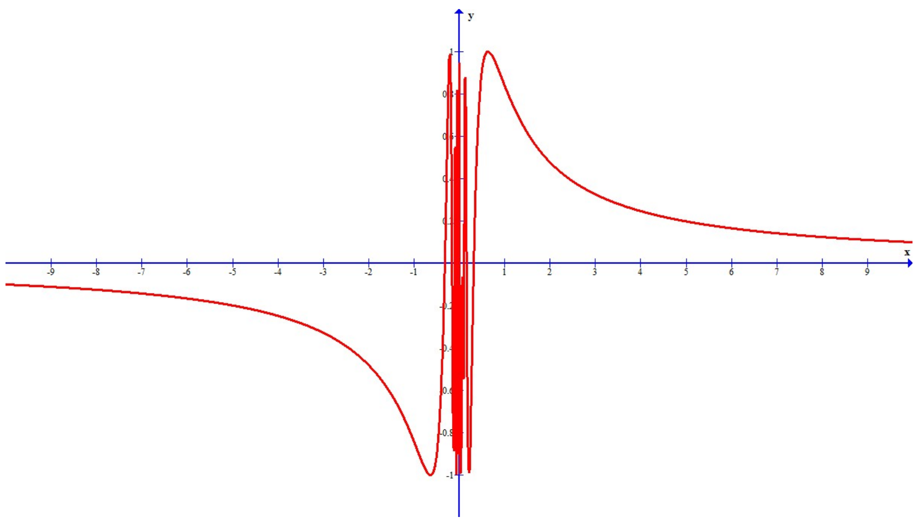
се нарича скок на $f(x)$ в точката x_0.

Функцията $f(x)$, разгледана в **пример 11.2**, има скок 1 при $x_0 = 1$.

Прекъсване от втори род.

Определение 11.6: Функцията $f(x)$ има прекъсване от втори род в точката x_0, ако не съществува поне една от границите $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Пример 11.8: Да разгледаме функцията $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. При $x_0 = 0$ границите $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ не съществуват. Това може да се заключи и от графиката на функцията:



Свойства на непрекъснатите функции:

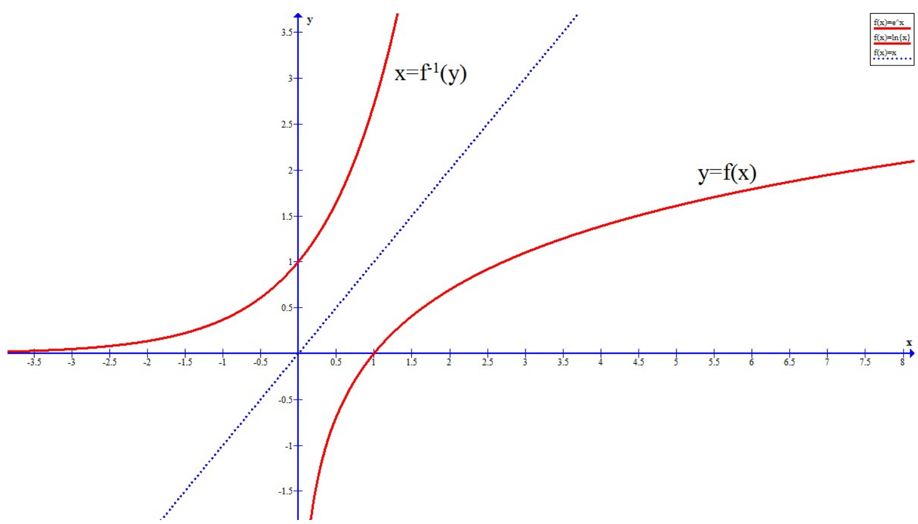
Твърдение 11.3: Ако $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати функции в x_0, то $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ (за $g(x) \neq 0$ в околност на точката x_0) са непрекъснати в x_0.

Твърдение 11.4: Нека $f(x)$ е непрекъсната в точка x_0, а $g(y)$ е непрекъсната в точката $y_0 = f(x_0)$. Тогава $h(x) = g(f(x))$ е непрекъсната в точка x_0.

Твърдение 11.5: Ако $f(x)$ е монотонна в интервала (a,b) и нека $x_0 \in (a,b)$, то съществуват $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ (т.е. прекъсването може да бъде само от първи род).

Твърдение 11.6: Ако $f(x)$ е непрекъсната в интервала $\triangle$ и строго растяща функция в интервала $\triangle$, тя е обратима и обратната ѝ функция е непрекъсната и строго растяща.

Доказателство:
Преди доказателството ще направим малко графични разяснения. За целта ще начертаем произволна строго растяща, непрекъсната функция f:



Тогава обратната на f се получава като се направи осева симетрия спрямо ъглополовящата на първи и трети квадрант (вж. Тема 3). Тогава при получаването на обратната (при правене на осева симетрия) получаваме същия обект, но завъртя (виж графиката). В такъв случай, ако функцията f няма прекъсвания, то и обратната на f няма да има прекъсвания. При разглеждането на графиката можете да установите, че изглежда, че ако f е растяща, то и нейната обратна е растяща.

Твърдение 11.7:

1. Константнатната функция е непрекъсната в $\mathbb{R}$.

2. Идентитетът е непрекъснат в $\mathbb{R}$.
3. Функцията $|x|$ в непрекъсната в $\mathbb{R}$.
4. Полиномът от степен n е непрекъснат в $\mathbb{R}$.
5. Рационалната функция $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ е непрекъсната в множеството

$$\{x|x \in \mathbb{R} \text{ и } Q_n(x) \neq 0\},$$

където $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ са съответно полиноми от степен n и m.
6. Показателната функцията е непрекъсната в $\mathbb{R}$.
7. Логаритичната функцията е непрекъсната в $(0, +\infty)$.
8. Степенната функция е непрекъсната в $\mathbb{R}$.
9. Функцията синус е непрекъсната в $\mathbb{R}$.
10. Функцията косинус е непрекъсната в $\mathbb{R}$.
11. Функцията тангенс е непрекъсната в множеството

$$\{x|x \in \mathbb{R} \text{ и } \cos x \neq 0\}.$$

12. Функцията котангенс е непрекъсната в множеството

$$\{x|x \in \mathbb{R} \text{ и } \sin x \neq 0\}.$$

Доказателство:

1. Общият вид на константната функция е $f(x) = c$, където c е константа. Нека x_0 е произволно реално число. За да докажем непрекъснатост на функцията в x_0, ще използваме дефиницията на Коши за непрекъснатост, т.е. задаваме $\varepsilon > 0$, търсим $\delta > 0$ такова, че от $|x - x_0| < \delta$ да следва

$$|f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Последното неравенство винаги е изпълнено и следователно е изпълнено и за $|x-x_0| < \delta$. Така показахме, че константната функция е непрекъсната в произволна реална точка x_0. Следователно тя е непрекъсната в $\mathbb{R}$.

2. Общият вид на идентитетът е $f(x) = x$. Нека x_0 е произволно реално число. За да докажем непрекъснатост на функцията в x_0, ще използваме дефиницията на Коши за непрекъснатост, т.е. задаваме $\varepsilon > 0$, търсим $\delta > 0$ такова, че от $|x - x_0| < \delta$ да следва $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. От веригата неравенства:

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta$$

следва, че е подходящо да изберем $\delta = \varepsilon$. Тогава за фиксирано $\varepsilon > 0$, съществува $\delta = \varepsilon$ такова, че от $|x - x_0| < \delta$ да следва $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, т.е. идентитетът е непрекъсната в $\mathbb{R}$.

3. Нека $f(x) = |x|$. Нека x_0 е произволно реално число. За да докажем непрекъснатост на функцията в x_0, ще използваме дефиницията на Коши за непрекъснатост, т.е. задаваме $\varepsilon > 0$, търсим $\delta > 0$ такова, че от $|x - x_0| < \delta$ да следва $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. От веригата неравенства:

$$|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| < \delta$$

следва, че е подходящо да изберем $\delta = \varepsilon$. Тогава за фиксирано $\varepsilon > 0$, съществува $\delta = \varepsilon$ такова, че от $|x - x_0| < \delta$ да следва $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, т.е. функцията $|x|$ е непрекъсната в $\mathbb{R}$.

4. Общият вид на полином от n-та степен е

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0.$$

За да докажем, че полиномът $P_n(x)$ е непрекъснат в $\mathbb{R}$, ще докажем първо по индукция, че функцията $f_n(x) = x^n$ е непрекъсната в $\mathbb{R}$.

   (а) За $n = 1$ идентитетът $f_1(x) = x$ е непрекъсната в $\mathbb{R}$ (това следва от точка 2).

   (б) Допускаме, че функцията $f_k(x) = x^k$ е непрекъсната в $\mathbb{R}$.

   (в) Ще докажем, че $f_{k+1}(x) = x^{k+1}$ е непрекъсната в $\mathbb{R}$. Функцията

   $$f_{k+1}(x) = x^{k+1} = x \cdot x^k = f_1(x) \cdot f_k(x)$$

   е непрекъсната в $\mathbb{R}$ като произведение на две непрекъснати функции в $\mathbb{R}$.

Следователно функцията $f_n(x) = x^n$ е непрекъсната в $\mathbb{R}$. Разписваме функцията P_n по следния начин:

$$P_n(x) = a_0 + ... + a_{n-1}f_{n-1}(x) + a_n f_n(x).$$

Ще докажем, че $P_n(x)$ е непрекъсната в $\mathbb{R}$ по индукция.

(а) Константната функция $P_0(x) = a_0$ е непрекъсната в $\mathbb{R}$ (това следва от точка 1).

(б) Допускаме, че функцията $P_k(x)$ е непрекъсната в $\mathbb{R}$.

(в) Ще докажем, че $P_{k+1}(x)$ е непрекъсната в $\mathbb{R}$. Функцията

$$P_{k+1}(x) = a_0 + ... + a_{n-1}f_{n-1}(x) + a_n f_n(x) = P_k(x) + a_n f_n(x)$$

е непрекъсната в $\mathbb{R}$ като резултат от умножение и събиране на непрекъснати функции в $\mathbb{R}$.

С това доказахме, че $P_n(x)$ е непрекъсната в $\mathbb{R}$ по индукция.

5. Вече доказахме, че полиномите са непрекъснати в $\mathbb{R}$. Тъй като рационалната функция е частно на два полинома, то тя е непрекъсната в дефиниционната област на $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

6. Всъщност обикновено показателната функция се дефинира да е непрекъсната в $\mathbb{R}$.

7. В предната точка доказахме, че показателната функция е непрекъсната върху $\mathbb{R}$. Освен това показателната функция е строго растяща. Следователно обратната ѝ функция ($\log_a x$,$a > 0, a \neq 1$) е непрекъсната върху $(0, +\infty)$.

8. Общият вид на степенната функция е $f(x) = x^\alpha$ при $\alpha \neq 1$ и $\alpha > 0$. Разглеждаме функцията $g(x) = |x|^\alpha$. Тя може да се запише по следния начин:

$$g(x) = |x|^\alpha = a^{\log_a |x|^\alpha} = a^{\alpha \cdot \log_a |x|}.$$

Следователно $g(x)$ е непрекъсната в $\mathbb{R}$ от твърдението за непрекъснатост на съставни функции. Но можем да изразим $f(x)$ по следния начин:

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha, & x > 0 \\ (-|x|)^\alpha, & x \leq 0 \end{cases}$$

Следователно и f е непрекъсната, тъй като $|x|^\alpha$, $(-|x|)^\alpha$ е непрекъсната и $|x|^\alpha = 0 = (-|x|)^\alpha$ при $x = 0$.

9. Нека x_0 е произволно реално число. За да докажем непрекъснатост на функцията в x_0, ще използваме дефиницията на Коши за непрекъснатост, т.е. задаваме $\varepsilon > 0$, търсим $\delta > 0$ такова, че от $|x - x_0| < \delta$ да следва

$$|f(x) - f(x_0)| = |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon.$$

Построяваме веригата от неравенства:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| = |\sin x - \sin x_0| &= \left|2 \cdot \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)\right| \\ &= |2| \cdot \left|\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right| \cdot \left|\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)\right| \end{aligned}$$

Тъй като $|\sin x| \leq |x|$ (виж тема 9, при доказването на границата $\lim \frac{\sin x}{x}$), то получаваме

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2 \cdot \left|\frac{x - x_0}{2}\right| \cdot 1 = |x - x_0| < \delta.$$

Тогава за фиксирано $\varepsilon > 0$, съществува $\delta = \varepsilon$ такова, че от $|x - x_0| < \delta$ да следва $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, т.е. функцията $\sin x$ е непрекъсната в $\mathbb{R}$.

10. Функцията $\cos x$ може да се разпише по следния начин:

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x).$$

Следователно $\cos x$ е непрекъсната в $\mathbb{R}$ като суперпозиция на две непрекъснати функции.

11. За функцията $\operatorname{tg} x$ е в сила следното:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Следователно функцията $\operatorname{tg} x$ е непрекъсната в дефиниционната си област като частно на две непрекъснати функции.

12. За функцията $\operatorname{cotg} x$ е в сила следното:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Следователно функцията $\operatorname{cotg} x$ е непрекъсната в дефиниционната си област като частно на две непрекъснати функции.