10.Граници на функции при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Функции, клонящи към $+\infty$ и $-\infty$. Асимптоти

1 Обща дефиниция на граница на функция

В тази секции ще разширим понятието „граница на функция“ така, че да съществуват границите на функцииите при $x \to \pm\infty$, както и границите на функции, клонящи към $\pm\infty$.

За целта ще въведем понятието „околност на $\pm\infty$“.

Определение 10.1: ξ-околност на $+\infty$ (ще пишем $(\xi, +\infty)$) наричаме множеството от реални числа, за които е изпълнено $x > \xi$.

Определение 10.2: ξ-околност на $-\infty$ (ще пишем $(-\infty, \xi)$) наричаме множеството от реални числа, за които е изпълнено $x < \xi$.

Определение 10.3 (на Коши): Нека $f(x)$ е функция с дефиниционна област $D \in \mathbb{R}$ и $x_0, L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Ще казваме, че L е граница на $f(x)$ при $x \to x_0$, ако за всяка U околност на L може да се намери V околност на x_0 такова, че от $x \in V\ \{x_0\}$ да следва $f(x) \in U$.

Определение 10.4 (на Хайне): Нека $f(x)$ е функция с дефиниционна област $D \in \mathbb{R}$ и $x_0, L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Ще казваме, че L е граница на $f(x)$ при $x \to x_0$, ако за всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D/\{x_0\}$, която клони към x_0, да е изпълнено $f(x_n) \to L$.

2 Асимптоти

Асимптота на функцията f е права, до която графиката на f се доближава безкрайно много. Има три вида асимптоти – вертикална, хоризонтална и наклонена асимптота.

2.1 Вертикална асимптота

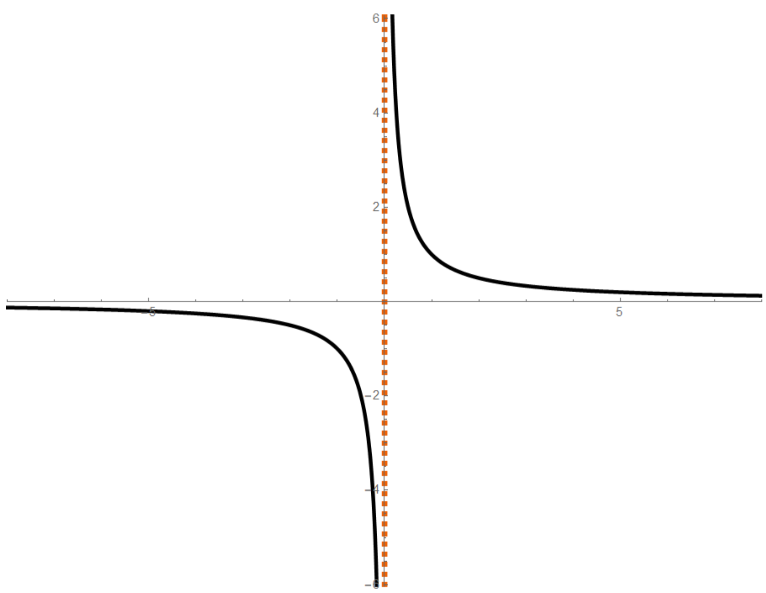
Това е права, успоредна на ординатата (т.е. има уравнение $x = a$), до която графиката на функцията се доближава безкрайно много при $x \to x_0$, но не я пресича. Тук x_0 е крайно фиксирано число. Формалното определение гласи

Определение 10.5: Казваме, че правата $x = a$ е **вертикална асимптота** на функцията $f(x)$, ако $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty$.

Пример 10.1: Функцията $f(x) = \frac{1}{x}$ има вертикална асимптота $x = 0$, тъй като

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

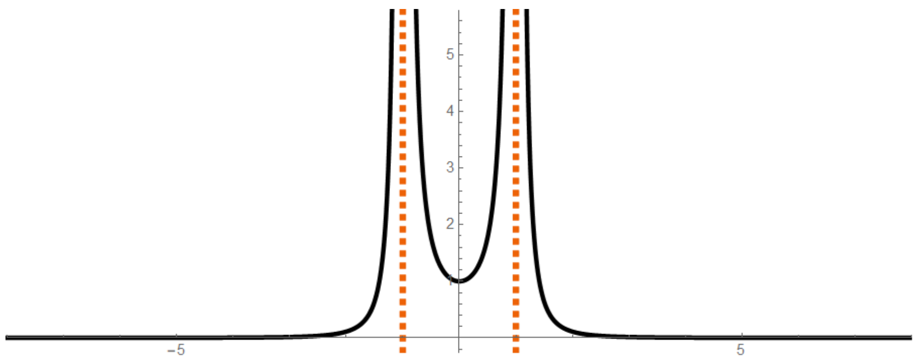
Графиката на f е поместена по-долу:



Пример 10.2: Функцията $f(x) = \frac{1}{(x^2-1)^2}$ има 2 вертикални асимптоти $x = \pm 1$, тъй като

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty, \ \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

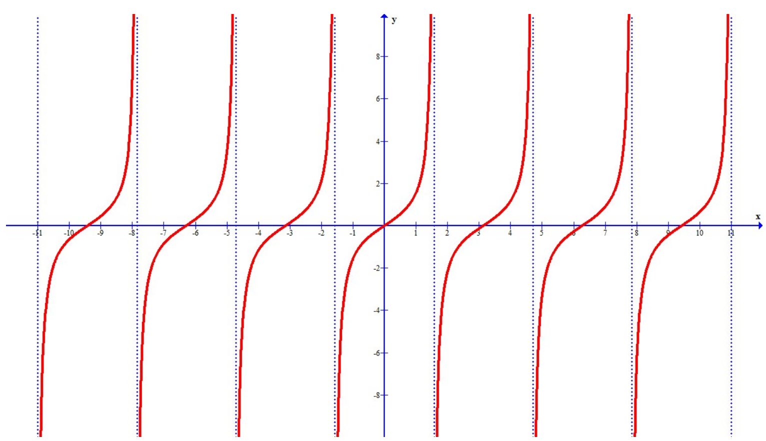
Графиката на f изглежда така:



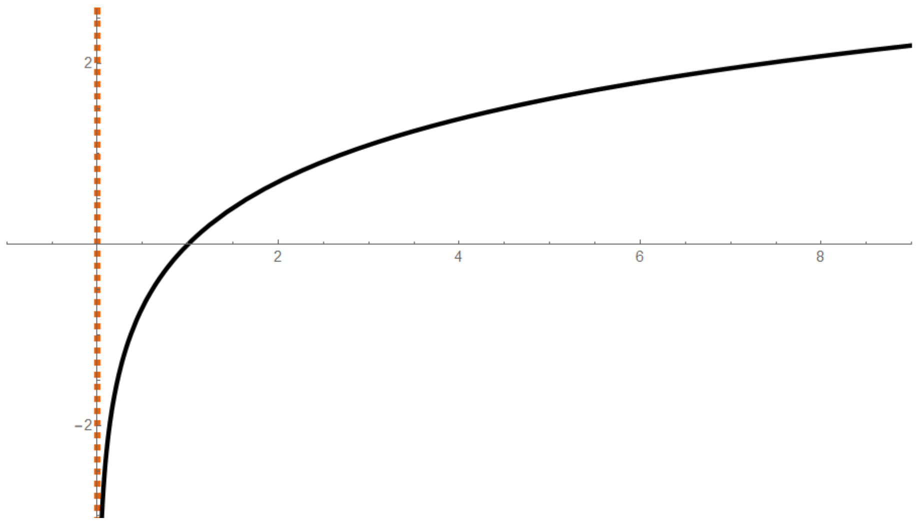
Пример 10.3: Да разгледаме функцията $f(x) = \operatorname{tg} x$. Всяка права от вида $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ е вертикална асимптота на f, защото

$$\lim_{x\to(2k+1)\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x == +\infty, \ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi+0} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Следователно функцията $f(x) = \operatorname{tg} x$ има безброй много вертикални асимптоти.

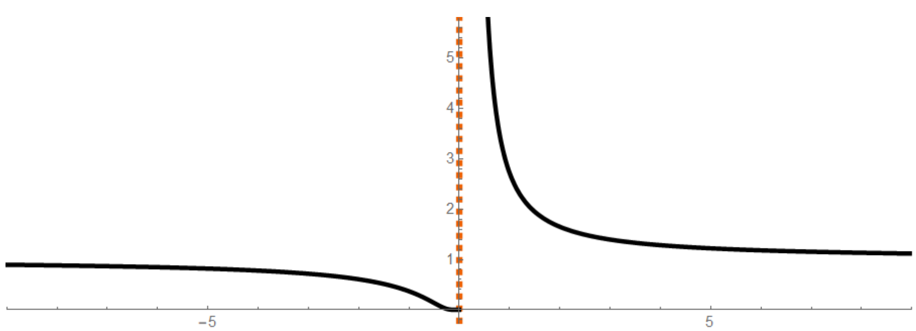


Пример 10.4: Функцията $f(x) = \ln x$ има 1 вертикална асимптота $x = 0$, тъй като $\lim\limits_{x \to 0+0} \ln x = -\infty$.



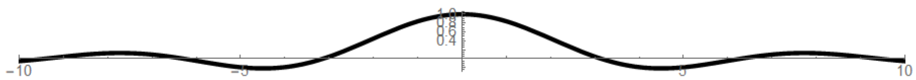
Пример 10.5: Функцията $f(x) = e^{1/x}$ има една вертикална асимптота $x = 0$. Обърнете внимание, че

$$\lim_{x \to 0-0} e^{1/x} = 0, \lim_{x \to 0+0} e^{1/x} = +\infty.$$



Когато търсим вертикални асимптоти на дадена функция е обичайна практика да проверим точките на прекъсване на естественото дефиниционно множество на функцията.

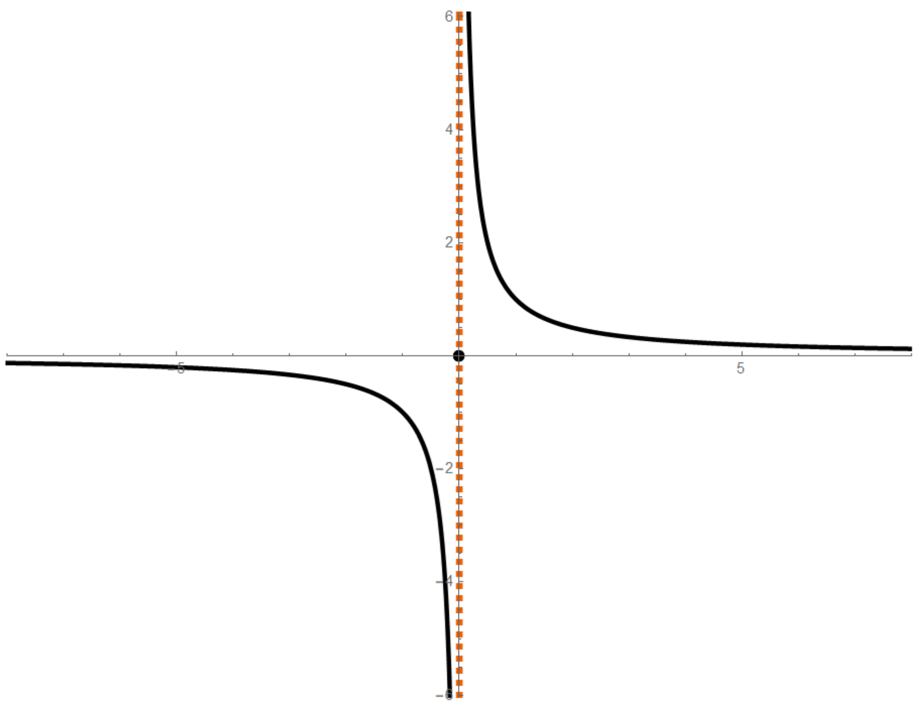
Пример 10.6: Функцията $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ няма вертикална асимптота при $x = 0$, тъй като $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Обърнете внимание, че функцията f не е дефинирана в $x = 0$, но въпреки това няма вертикална асимптота при $x = 0$.



Пример 10.7: Функцията

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

има 1 вертикална асимптота – при $x = 0$. Обърнете внимание, че функцията f е дефинирана в $x = 0$, но има вертикална асимптота при $x = 0$.



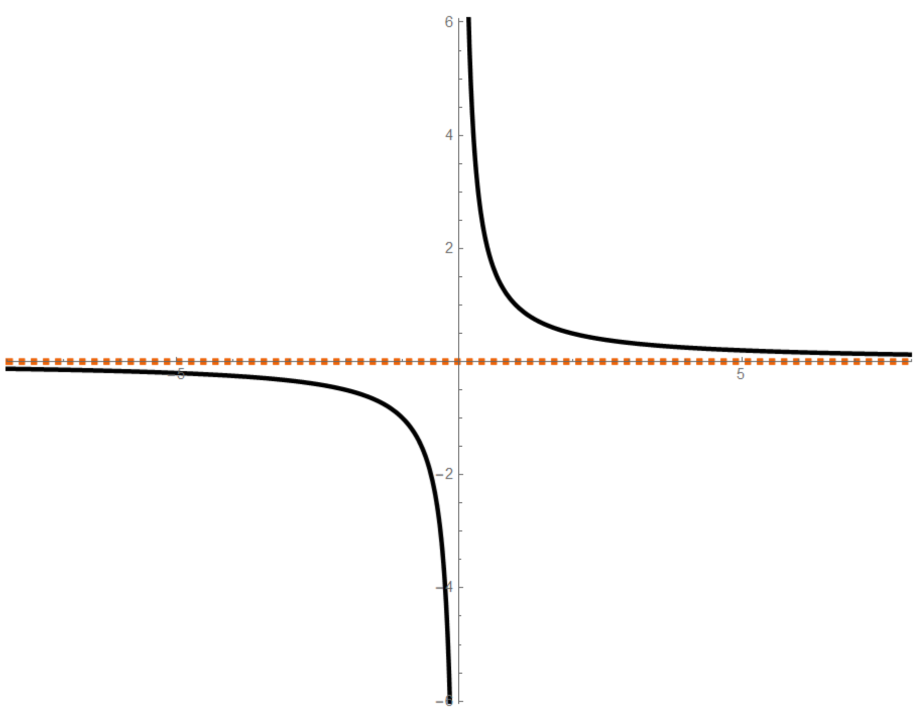
2.2 Хоризонтална асимптота

Това е права, успоредна на абсцисата (т.е. права с уравнение $y = b$), до която графиката на функцията се доближава безкрайно много при $x \to \infty$, но не я пресича (при $x \to \infty$). Последното може да се запише формално по следния начин:

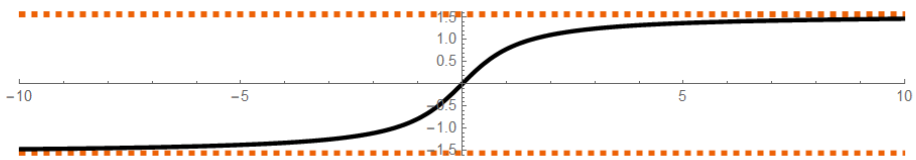
Определение 10.6: Казваме, че правата $y = b$ е хоризонтална асимптота на $f(x)$, ако $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$.

Забележка: Една функция може да има най-много 2 хоризонтални асимптоти.

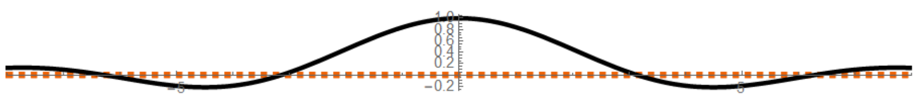
Пример 10.8: Функцията $f(x) = \frac{1}{x}$ има хоризонтална асимптота, тъй като $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = 0$. Графиката на функцията изглежда така:



Пример 10.9: Функцията $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ f : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ има две хоризонтални асимптоти, тъй като $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$.



Пример 10.10: Функцията $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ има хоризонтална асимптота $x = 0$, тъй като функцията може да се представи като произведение от ограничена функция и безкрайно голяма функция. Обърнете внимание, че графиката и асимптотата имат безброй много пресечни точки.



2.3 Наклонена асимптота

Това е права, до която графиката на функцията се доближава безкрайно много при $x \to \infty$, но не я пресича (при $x \to \infty$).

Формалното определение гласи

Определение 10.7: Казваме, че правата $y = kx + b$ е наклонена асимптота на $f(x)$ при $x \to \infty$, когато $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.

Забележка 1: Ще се опитам да обясня на кратко от къде се появява формулата $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) = 0$. Разглеждаме функция $f(x)$. За да разберем дали някаква права е безкрайно близо до функцията при безкраен аргумент, просто разглеждаме разликата на функцията с уравнението на правата. Ако тази разлика клони към 0 при $x \to \infty$, то правата е наистина безкрайно близо до функцията.

Забележка 2: Хоризонтална асимптота е частен случай на наклонена асимптота, при който $a = 0$.

Забележка 3: Една функция може да има най-много 2 наклонени асимптоти. Това е така, защото функцията може да има 2 различни асимптоти при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. Поради факта, че една функция при $x \to \infty$ (и не само) има единствена граница следователно всяка функция може да има най-много 2 наклонени асимптоти. Тъй като хоризонталните асимптоти са частен случай на наклонените, то една функция може да има не повече от 2 хоризонтални асимптоти или 1 хоризонтална и 1 нехоризонтална наклонена асимптота.

Забележка 4: Директно от дефиницията на наклонена асимптота не могат да се съобразят коефициентите a и b.

Твърдение 10.1: Коефициентите a и b в уравнението на наклонената асимптота $y = ax + b$ могат да се пресметнат по следния начин:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \ b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax).$$

Доказателство:

Понеже $y = ax + b$ е уравнението на наклонена асимптота на $f(x)$ следователно

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) = 0.$$

Нека да разгледаме границата

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - ax - b}{x} = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \cdot 0 = 0. \tag{1}$$

Пресмятаме последователно:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - ax - b}{x} &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to\infty} a - \lim_{x\to\infty} \frac{b}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - a. \end{aligned} \tag{2}$$

От (1) и (2) получихме $a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Тъй като $y = ax + b$ е уравнение на наклонена асимптота на функцията $f(x)$, то

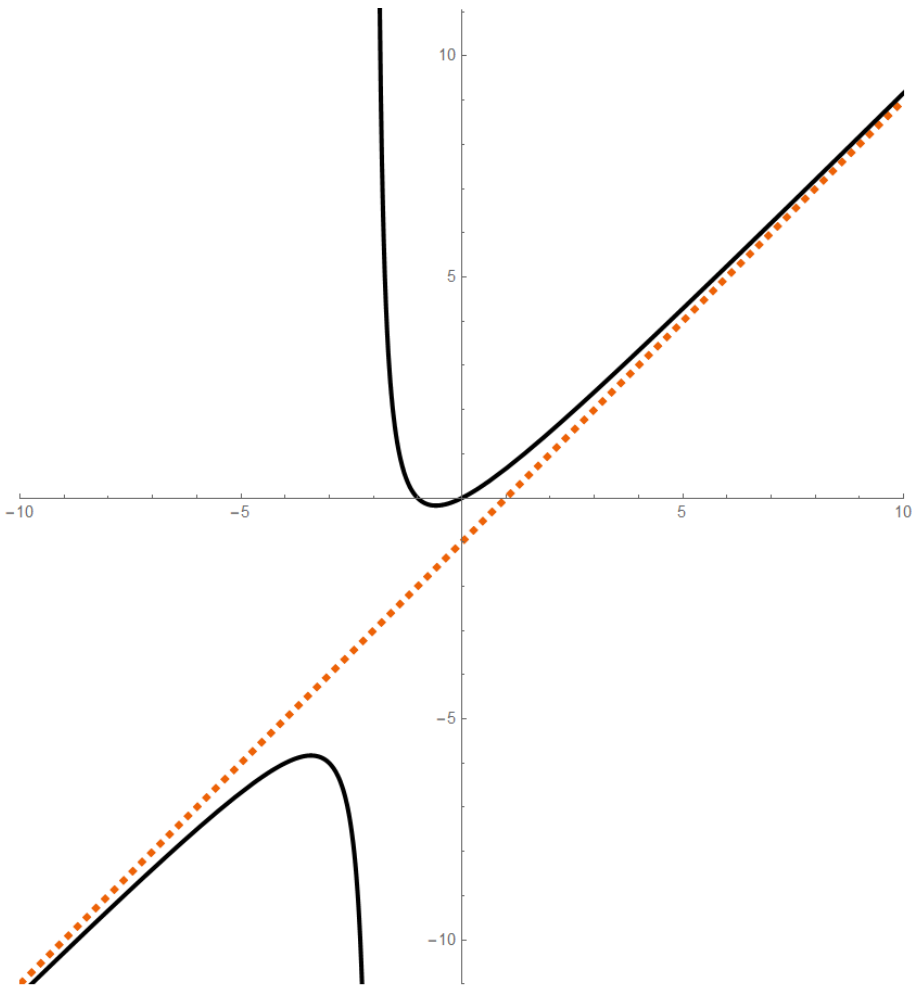
$$0 = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) - \lim_{x\to\infty} b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) - b,$$

т.е. $b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax)$. ■

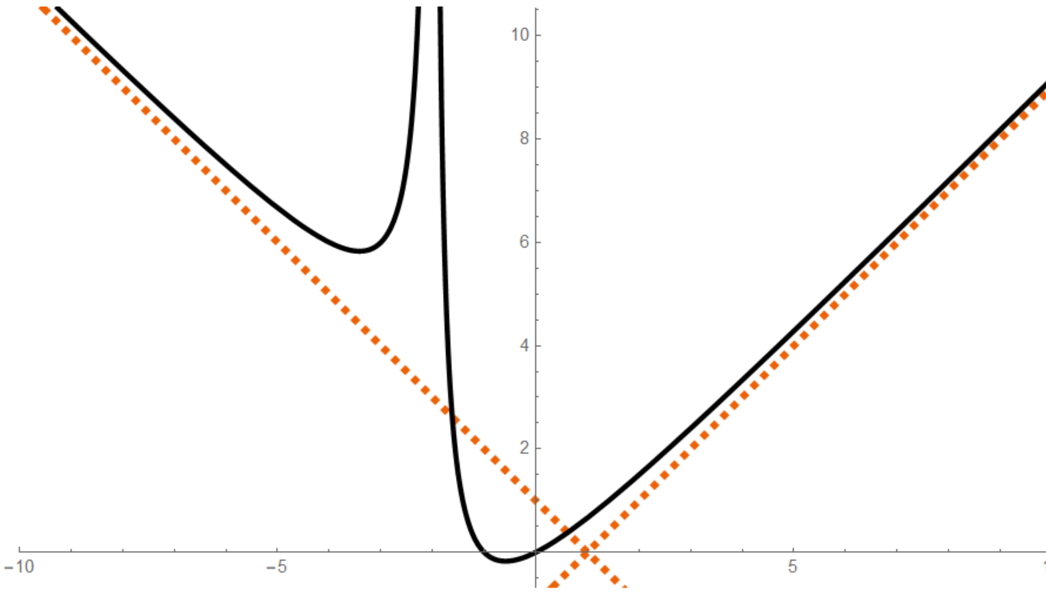
Пример 10.11: Функцията $f(x) = \frac{x(x+1)}{x+2}$ има една наклонена асимптота, тъй като

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1$$
$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - 1.x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x(x+1)}{x+2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x+2} = -1.$$

Следователно функцията има наклонена асимптота, чието уравнението е $y = x - 1$.



Пример 10.12: Функцията $\frac{x(x+1)}{|x+2|}$ има две различни наклонени асимптоти – $y = x - 1$ и $y = -x + 1$.



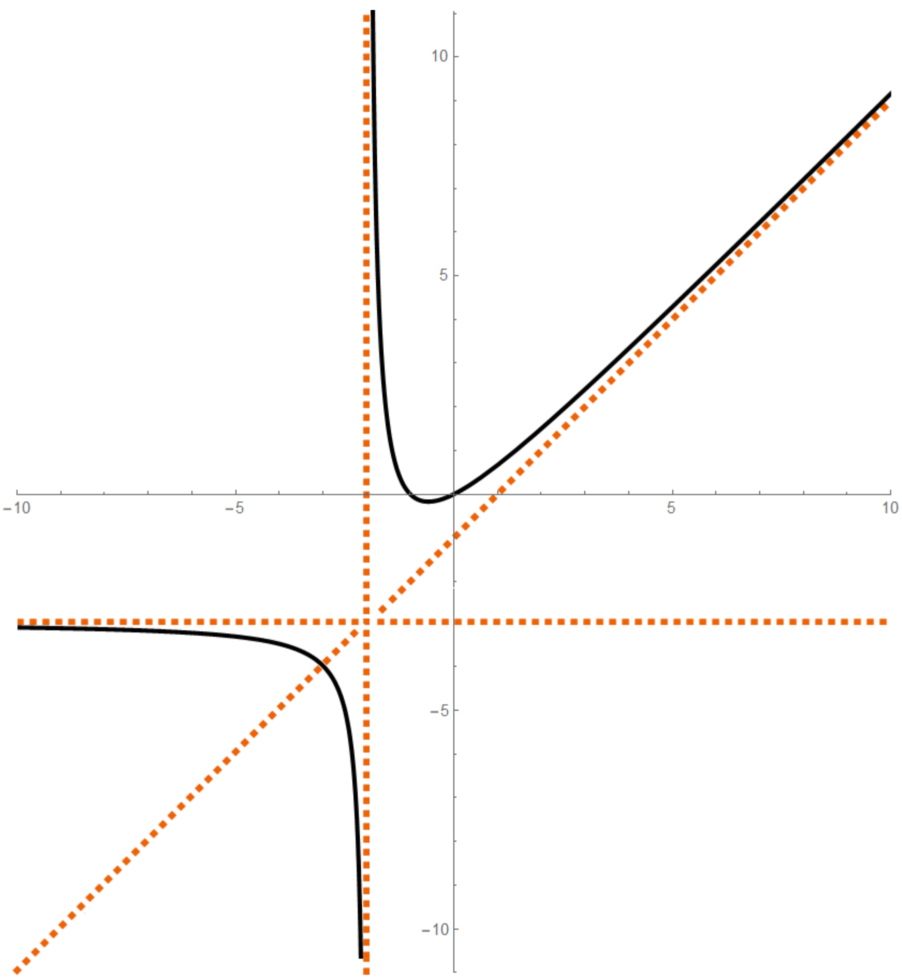
Пример 10.13: Функцията

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(x+1)}{x+2}, & \text{ако } x > -2 \\ \frac{1}{x+2} - 3, & \text{ако } x \leq -2 \end{cases}$$

има една наклонена асимптота и една хоризонтална асимптота. Уравнението на наклонената асимптота е $y = x - 1$, като функцията се доближава безкрайно много до нея при $x \to +\infty$ (виж **пример 10.11**). Проверяваме дали функцията има хоризонтална асимптота при $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x+2} - 3 \right) = -3.$$

От тук заключваме, че функцията има хоризонталната асимптота с уравнение $y = -3$.


10
5
−5
−10
−10
−5
5
10